CONTROL 1

P1. Ejercicios

a) **(3 puntos)** Tomando la sustitución $v = \ln y$, resuelva la ecuación diferencial

$$y'(x) + xy(x) = -\frac{2}{x} y \ln y \quad \text{para } x > 0$$

Solución.

En primer lugar, se tiene que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Luego,

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{y}\left[\frac{2}{x} y \ln y + xy\right] = -\left[\frac{2}{x} v + x\right]$$

la cual es una ecuación lineal de primer orden dada por

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = -x \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Aplicando el factor integrable

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x} dx\right) = \exp(2 \ln x) = x^2 \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

se tiene que

$$\mu(x)\left[\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v\right] = -x\mu(x) \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 v(x)\right] = -x^3$$

Integrando, existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^2 v(x) = -\frac{1}{4} x^4 + C$$

$$v(x) = -\frac{1}{4} x^2 + \frac{C}{x^2} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Finalmente,

$$y = \exp(v(x))$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{4} x^2 + \frac{C}{x^2}\right)$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante. **(0.5 puntos)**

b) **(3 puntos)** Determine una solución positiva de la siguiente ecuación para $x > 1$.

$$y' + \left(\frac{x}{x^2-1}\right) y + \left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right)\frac{1}{y} = 0$$

Solución.

Esta es una ecuación de Bernoulli para $n = -1$. Tomando

$$z = y^{1-n} = y^2 \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} z' &= 2yy' \\ &= -2y\left(\left(\frac{x}{x^2-1}\right) y + \left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right)\frac{1}{y}\right) \\ &= -2\left(\frac{x}{x^2-1}\right) y^2 - 2\left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right) \end{aligned}$$

O bien,

$$z' + 2\left(\frac{x}{x^2-1}\right) z = -2\left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right) \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Tomando el factor integrante

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{2x}{x^2-1} dx\right) = \exp\left(\ln\left(x^2-1\right)\right) = x^2 - 1 \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

y multiplicando la ecuación por μ, se verifica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\mu(x) z(x)\right] &= -2\left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right)\mu(x) \\ \frac{d}{dx}\left[\left(x^2-1\right) z(x)\right] &= -2e^{2x} \end{aligned} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Integrando, existe una constante $C > 0$ (ya que $C = (x^2-1) z(x) + e^{2x} > 0$) tal que

$$\begin{aligned} \left(x^2-1\right) z(x) &= -e^{2x} + C \\ z(x) &= \frac{C - e^{2x}}{x^2-1} \end{aligned} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Luego, la solución positiva de esta ecuación está dada por

$$y(x) = \sqrt{\frac{C - e^{2x}}{x^2-1}} \qquad \textbf{(0.5 puntos)}$$

P2. Un paracaidista de masa $m > 0$ se lanza desde un avión y abre su paracaídas. La fuerza de fricción que frena al paracaidista es proporcional al cuadrado de la velocidad con que cae, con una constante de proporcionalidad $k > 0$. Sea $g > 0$ la aceleración de gravedad.

a) **(1 punto)** Si $v(t)$ representa la velocidad con que cae el paracaidista, considerando el sentido de caída como positivo, explique por qué v verifica la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k\left[v(t)\right]^2$$

Solución.
La segunda ley de Newton señala que la suma de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto entre la masa m y la aceleración (que corresponde a la derivada temporal de v). **(0.4 puntos)**
Las fuerzas externas son el peso ($P = mg$) y la fricción (F), la cual es proporcional a v^2 y va en contra del sentido del movimiento. Entonces, como el sentido de caída se considera como positivo, se tiene que $F = -kv^2$. **(0.4 puntos)**
En conclusión,

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= P - F \\ &= mg - k\left[v(t)\right]^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(0.2 puntos)}$$

b) **(4 puntos)** Defina $\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. Verifique que $v_1(t) = \alpha$ es una solución particular de la ecuación. Use dicha información para calcular la solución general con la condición inicial $v(0) = v_0 \geq 0$.
Indicación: Exprese la solución en función del parámetro α.
Solución.
Es fácil comprobar que $v_1 \equiv \alpha$ es solución particular. **(0.4 puntos)**
Dado que es una ecuación de Riccati, se aplica la sustitución

$$v = \alpha - \frac{1}{y} \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

Luego,

$$\begin{aligned} v' &= \frac{y'}{y^2} \\ g - \frac{k}{m}\left[v(t)\right]^2 &= \frac{y'}{y^2} \\ g - \frac{k}{m}\left(\alpha - \frac{1}{y}\right)^2 &= \frac{y'}{y^2} \\ g - \frac{k}{m}\left(\alpha^2 - \frac{2\alpha}{y} + \frac{1}{y^2}\right) &= \frac{y'}{y^2} \\ \frac{2\alpha k}{my} - \frac{k}{my^2} &= \frac{y'}{y^2} \\ -\frac{k}{m} &= y' - \frac{2\alpha k}{m}y \end{aligned} \qquad \textbf{(0.8 puntos)}$$

la cual es una ecuación lineal. Tomando el factor integrante

$$\mu(t) = \exp\left(\int -\frac{2\alpha k}{m}dt\right) = \exp\left(-\frac{2\alpha k}{m}t\right) \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

se cumple que

$$
\begin{aligned}
y' - \frac{2\alpha k}{m} y &= -\frac{k}{m} \\
\frac{d}{dt}\left[\mu(t)\, y(t)\right] &= -\frac{k}{m}\mu(t) = -\frac{k}{m}\exp\left(-\frac{2\alpha k}{m}t\right) && \textbf{(0.4 puntos)} \\
\exp\left(-\frac{2\alpha k}{m}t\right) y(t) &= -\frac{k}{m}\int \exp\left(-\frac{2\alpha k}{m}t\right) dt \\
\exp\left(-\frac{2\alpha k}{m}t\right) y(t) &= \frac{1}{2\alpha}\exp\left(-\frac{2\alpha k}{m}t\right) + C \\
y(t) &= \frac{1}{2\alpha} + C\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right) && \textbf{(0.4 puntos)}
\end{aligned}
$$

para una constante $C \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \alpha - \frac{1}{y(t)} \\
&= \alpha - \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha C\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right)} && \textbf{(0.4 puntos)}
\end{aligned}
$$

Aplicando la condición inicial $v(0) = v_0$,

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \alpha - \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha C} \\
C &= -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{v_0 + \alpha}{v_0 - \alpha}\right) && \textbf{(0.4 puntos)}
\end{aligned}
$$

En conclusión,

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \alpha - \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha C\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right)} \\
v(t) &= \alpha - \frac{2\alpha}{1 - \left(\frac{v_0+\alpha}{v_0-\alpha}\right)\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right)} \\
v(t) &= \alpha - \frac{2\alpha(v_0 - \alpha)}{v_0 - \alpha - (v_0 + \alpha)\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right)} && \textbf{(0.4 puntos)}
\end{aligned}
$$

c) **(1 punto)** Asuma que $v_0 > \alpha$. Verifique que $v(t)$ es decreciente y que $v(t) \in (\alpha, v_0]$.

Solución.

Dado que $(v_0 + \alpha)\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right)$ es creciente, se tiene que $v(t)$ es decreciente. También es posible verificar que la derivada es no negativa. **(0.5 puntos)**

Por otra parte,

$$
\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[\alpha - \frac{2\alpha(v_0-\alpha)}{v_0 - \alpha - (v_0+\alpha)\exp\left(\frac{2\alpha k}{m}t\right)}\right]
$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\alpha - \frac{2\alpha (v_0 - \alpha) \exp\left(-\frac{2\alpha k}{m} t\right)}{(v_0 - \alpha) \exp\left(-\frac{2\alpha k}{m} t\right) - (v_0 + \alpha)} \right] = \alpha$$

lo cual permite concluir que $\alpha < v(t) \leq v_0$ para todo $t > 0$. **(0.5 puntos)**

P3. Considere el siguiente problema de Cauchy para $y_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{t}{1+t^2} \operatorname{Arctan}(y) \cos(y) \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

a) **(1 punto)** Encuentre todas las soluciones constantes de la ecuación diferencial.
Solución.
Si y es una solución constante, entonces $y' = 0$. Luego, debe verificarse que

$$\operatorname{Arctan}(y) \cos(y) = 0 \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

Dado que $\cos(y) = 0$ si y sólo si $y \in \left\{ \left(\frac{k}{2} + 1\right) \pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ y$\operatorname{Arctan}(y) = 0$ si y solo si $y = 0$. Por lo tanto, las funciones $y \equiv a$, con

$$a \in \left\{ \left(\frac{k}{2} + 1\right) \pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\} \qquad \textbf{(0.6 puntos)}$$

son las únicas funciones constantes que son solución de la ecuación.

b) **(3 puntos)** Pruebe que, para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de Cauchy posee solución única.
Solución.
Es necesario verificar las hipótesis del Teorema de Existencia y Unicidad. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\left(\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2\right) \quad f(t, y) = \frac{t}{1+t^2} \operatorname{Arctan}(y) \cos(y)$$

Dicha función es continua en su dominio. **(0.5 puntos)**
Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{1+t^2} \left[\frac{\cos(y)}{y^2+1} - \sin(y) \operatorname{Arctan}(y) \right] \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

donde

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \left| \frac{t}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

y

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \left| \frac{\cos(y)}{y^2+1} - \sin(y) \operatorname{Arctan}(y) \right| &\leq \left| \frac{\cos(y)}{y^2+1} \right| + \left| \sin(y) \operatorname{Arctan}(y) \right| \\ &\leq 1 + \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(0.4 puntos)} \end{aligned}$$

Por ende,

$$\left(\forall\,(t,x)\in\mathbb{R}^2\right) \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{t}{1+t^2}\left[\frac{\cos(y)}{y^2+1} - \sin(y)\operatorname{Arctan}(y)\right]\right| \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

probando que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es acotada en $\mathbb{R}^2$.

Como consecuencia del Teorema del Valor Medio, se tiene que f es Lipschitz continua con respecto a su segunda componente. **(0.4 puntos)**

Por lo tanto, el problema de Cauchy posee una solución única $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.**(0.5 puntos)**

Nota: También es posible argumentar que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R}^2$, lo cual implica que la función f sea Lipschitz continua con respecto a su segunda componente. Este razonamiento tendrá el mismo puntaje.

c) **(2 puntos)** Demuestre que las soluciones para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ son acotadas.

Indicación: Analice diferentes tipos de condiciones iniciales. Suponga que y no es acotada superiormente y deduzca que existe $T > 0$ tal que $y(T)$ es igual a una solución constante.

Solución.

Si $y_0 \in \left\{\left(\frac{k}{2}+1\right)\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$, entonces la solución es única y constante, de acuerdo a las partes a) y b). Por ende, la solución es acotada. **(0.8 puntos)**

Si ahora $y_0 \notin\in \left\{\left(\frac{k}{2}+1\right)\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$, se procede por contradicción. Se supone que la solución $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ no es acotada superiormente. Dado que y es continua y no acotada, existe $T > 0$ tal que $y(T) = \left(\frac{k}{2}+1\right)\pi = a_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.**(0.4 puntos)**

Se observa que $y(t)$ es solución única del problema

$$\begin{aligned} y' &= \frac{t}{1+t^2}\operatorname{Arctan}(y)\cos(y) \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ y(T) &= a_k \end{aligned} \qquad \textbf{(0.4 puntos)}$$

Dado que $y \equiv a_k$ es una solución del problema, se concluye que y es constante, contradiciendo que y no sea acotada superiormente. En conclusión, la solución debe ser acotada para toda condición inicial. **(0.4 puntos)**