PAUTA CONTROL 1

P1. Para $x > 0$ considere la ecuación diferencial

$$xy' + \frac{1-x^2}{1+x^2}\,y = \frac{4\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}y^{1/2} \tag{1}$$

a) (2 pts.) Sea $x \mapsto y(x) > 0$ que satisface (1) y $x \mapsto u(x)$ función, sea $u = yx$ demostrar que tal sustitución transforma (1) en la ecuación de Bernoulli

$$u' - \frac{2x}{1+x^2}\,u = \frac{4\,\mathrm{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}u^{1/2} \tag{2}$$

Solución: Consideramos la sustitución propuesta $u = yx$, como $y(x) > 0$ implica $u(x)$ para todo $x > 0$, así $u^{1/2}$ está bien definida y es derivable por álgebra. Calculando u' se obtiene

$$u' = y'x + y = y'x + \frac{u}{x}$$

reemplazando esto en (1) se tiene que

$$\underbrace{u' - \frac{u}{x} + \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{u}{x}} = \underbrace{\frac{4\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{u}{x}\right)^{1/2}}$$

$$u' - \frac{2x}{1+x^2}u = \frac{4\cdot\mathrm{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}u^{1/2},$$

es lo buscado.

Distribución de puntajes:

- Por calcular u', asignar (1 pto.)
- Por reemplazar en la EDO y obtener lo pedido, asignar (1 pto.)

b) (3 pts.) Calcular la solución de (2).

Solución: Se observa que (2) es una EDO tipo Bernoulli de la forma $u' + p(x)u = q(x)u^n$, donde $n = 1/2$ y $x \mapsto p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ y $x \mapsto q(x) = \frac{4 \cdot \operatorname{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ son continuas en $\mathbb{R}$ (en particular para $x > 0$), luego por lo visto en clases el cambio $z = u^{1-1/2}$ conduce a la EDO lineal en z

$$\begin{aligned} z' + (1-n)p(x)z &= (1-n)q(x) \\ z' - \frac{x}{1+x^2} &= \frac{2 \cdot \operatorname{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

De donde con el factor integrante $x \mapsto \phi(x) = e^{-\int \frac{s}{1+s^2} ds} = e^{-1/2 \cdot \ln(1+x^2)} = (1+x^2)^{-1/2}$ se llega a que

$$\begin{aligned} z(x) &= \phi(x)^{-1} \left(\int q(s)\phi(s) ds + C \right), \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{1+x^2} \left(\int \frac{2 \cdot \operatorname{arctg}(s)}{1+s^2} ds + C \right) \\ &= \sqrt{1+x^2} \left(\operatorname{arctg}^2(x) + C \right), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Por identificar los parámetros y plantear la sustitución de la EDO tipo Bernoulli y llegar a la EDO lineal en z asignar (1 pto.)
- Por determinar el factor integrante ϕ y plantear la solución en z, asignar (1 pto.)
- Por el cálculo de la primitiva y entregar la expresión final en z, asignar (1 pto.)

c) (1 pto.) Usar la parte anterior y la sustitución propuesta para determinar la solución general de (1).

Solución: Usando la expresión obtenida para $z(x)$ junto con $z(x) = u^{1/2}$ se llega a

$$u(x) = (1+x^2) \left[\operatorname{arctg}^2(x) + C \right]^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Finalmente como $u(x) = xy(x)$ se concluye que la solución general de (1), definida en $x > 0$ como tal es

$$y(x) = \frac{1+x^2}{x} \left[\operatorname{arctg}^2(x) + C \right]^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntajes:

- Por entregar la expresión de $u(x)$, asignar (0,5 pts.)
- Por entregar la expresión de $y(x)$, asignar (0,5 pts.)

****

P2.- Hallar la familia de curvas para las cuales la longitud del tramo definido por la recta tangente entre el punto de contacto (x, y) y el eje de las ordenadas OY es igual al segmento que se origina entre el origen y el punto que nace en la intersección del eje de las ordenadas con la recta tangente. Para resolver este problema siga los siguientes pasos

a) (1.5 pts.) Considere $P = (x, y)$ un punto en el primer cuadrante (ie $x > 0, y > 0$) (no se preocupe de los demás cuadrantes), perteneciente a un miembro de la familia buscada. Designe por $Q = (0, b)$ al punto de intersección de la recta tangente descrita con el eje OY. Para el caso $y > b$, imponga la condición del enunciado para demostrar que se tiene la relación $b = \frac{x^2+y^2}{2y}$.

Solución: La condición del enunciado se traduce en que $\overline{PQ} = b$, ahora si $R = (x, b)$ se aplica el Teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle PQR$ obteniendo que $x^2+(y-b)^2 = (\overline{PQ})^2$, de donde se deduce que $b = \frac{x^2+y^2}{2y}$.

Distribución de puntajes:

- Por plantear lo elementos primarios del problema e identificar en ellos la propiedad del enunciado, asignar (0, 5 pts.)
- Por aplicar el Teo de Pitágoras y obtener la relación respectiva, asignar (0,5 pts.)
- Por concluir de lo anterior la relación pedida, asignar (0,5 pts.)

b) (2.5 pts.) Si θ es el ángulo que forma la tangente con el eje OX, muestre que $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y-b}{x}$ y concluya que se tiene la siguiente EDO

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx} \tag{3}$$

Clasifique el tipo de EDO obtenida en (3).

Solución: Por semejanza el ángulo θ está en el vértice Q del $\triangle PQR$, por ende se tiene que $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{y-b}{x}$. Reemplazando la expresión de b de la parte anterior, se obtiene

$$y' = \frac{y - \frac{x^2+y^2}{2y}}{x} = \frac{y^2 - x^2}{2yx}.$$

Notamos que el lado derecho es un cociente de funciones homogéneas del mismo grado, de hecho

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx} = \frac{(y/x)^2 - 1}{2(y/x)},$$

luego se trata de una EDO homogénea.

Distribución de puntajes:

- Por determinar correctamente la $\text{tg}(\theta)$, asignar (0, 5 pts.)
- Por reemplazar, manipular y obtener la expresión pedida en (3), asignar (1 pto.)
- Por identificar que el lado derecho es cociente de homogéneas (o bien decir que es hom de grado 0) y re-escribirla como función de la variable y/x para identificar que es EDO homogénea, asignar (1 pto.)

c) (2 pts.) Resolver la EDO en (3). De ser posible identifique la familia de curvas buscada, explicitando sus príncipales elementos (foco, vértice, radio, etc, según corresponda).

Solución: De lo anterior ya tenemos que

$$y' = \frac{(y/x)^2 - 1}{2(y/x)},$$

de donde la sustitución $y(x) = z(x)x$ con $x \mapsto z(x)$ función derivable, luego $y' = z'x + z$, esto nos conduce a la EDO de variables separables en z

$$z'x = -\frac{z^2 + 1}{2z},$$

no habiendo soluciones ctes, separamos variables y tomamos primitiva (estamos en el caso $x > 0$)

$$\ln(z^2 + 1) = \ln(x^{-1}) + C = \ln(x^1 \cdot A), \quad A > 0.$$

Donde $A > 0$ es tal que $C = \ln(A)$, luego $z^2 + 1 = \frac{A}{x}$, como $y = zx$ se llega a

$$y^2 + x^2 = Ax \Leftrightarrow y^2 + \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2.$$

Renombrando la constante $R := A/2$, se deduce que la familia de curvas buscada son circunferencias de centro $(R, 0)$ y radio R.

Distribución de puntajes:

- Por entregar la sustitución acorde al caso EDO homogénea y llegar a la EDO de variables separables en z, asignar (0, 5 pts.)
- Por calcular las primitivas luego de separar variables, asignar (0,5 pts.)
- Por escribir la expresión obtenida en función de x e y, asignar (0,5 pts.)
- Por identificar la familia de curvas pedida y sus elementos notables, asignar (0,5 pts.)

****

P3.- La propagación de una simple acción en una población (por ejemplo, los conductores que encienden las luces de sus automóviles al atardecer) depende parcialmente de circunstancias externas (oscurecimiento) y parcialmente de una tendencia a imitar a los demás que ya han realizado la acción. En este caso, la proporción $t \mapsto y(t)$ de personas que ya han realizado la acción pueden describirse por la ecuación

$$y' = (1-y)(x(t)+by) \tag{4}$$

donde $t \mapsto x(t)$ mide el estímulo externo y b es el coeficiente de imitación.

a) (2 pts.) Encuentre el valor de k que hace que la función constante $t \mapsto y_1(t) = k$ sea solución de (4).

Solución: Al reemplazar y_1 en (3) se obtiene

$$\begin{aligned} y_1' &= (1-y_1)(x(t)+by_1) \\ 0 &= (1-k)(x(t)+bk) \end{aligned} \tag{5}$$

De acá obtenemos que o bien $k=1$ o bien $k = -\frac{x(t)}{b}$. Dado que k es una constante y $-\frac{x(t)}{b}$ no necesariamente es una función constante se deduce que la única opción para k es que $k=1$.

Distribución de puntajes:

- Por llegar a (5) (0,6 pts.)
- Por llegar a $k=1$ o $k = -\frac{x(t)}{b}$ (0,6 pts.)
- Por descartar $k = -\frac{x(t)}{b}$ y deducir que $k=1$ es la única opción. (0,8 pts.)

b) (4 pts.) Usando lo anterior encuentre otra solución de (4) para el caso en que $t \mapsto x(t) = at$. La respuesta puede dejarla en forma integral.

Solución: Dado que (3) es una ecuación de Riccati, buscamos otra solución de la forma $y = 1 + \frac{1}{z}$, nuevamente al reemplazar en (3) se obtiene

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)' = \left(1-\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)\left(x(t)+b\left(1+\frac{1}{z}\right)\right) \tag{6}$$

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z}\left(at+b+\frac{b}{z}\right)$$

$$z' = (at+b)z - b \tag{7}$$

Esta última se trata de una EDO lineal de orden 1 a coeficientes variables no homogénea. La solución general se puede obtener, por ejemplo, usando el factor integrante

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \exp\left(-\int (at+b)dt\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2} - bt\right) \end{aligned}$$

de esta forma

$$z(t) = \frac{C}{\mu(t)} - \frac{b}{\mu(t)} \int \mu(t) dt \tag{8}$$

$$= C \exp\left(\frac{t^2}{2} + bt\right) - b \exp\left(\frac{t^2}{2} + bt\right) \int \exp\left(-\frac{t^2}{2} - bt\right) dt \tag{9}$$

donde C es una constante. Reemplazando esto en $y = 1 + \frac{1}{z}$ se obtiene lo pedido.

Distribución de puntajes:

- Por deducir que se trata de una ecuación de Riccati $(0,5$ pts.)
- Por buscar la segunda solución en la forma $y = 1 + \frac{1}{z}$ (0,25 pts.)
- Por reemplazar y obtener (6) (0,5 pts.)
- Por llegar a (7) (1 pts.)
- Por deducir que se trata de una EDO lineal de orden 1 a coeficientes variables no homogénea y llegar a (8) $(1,25$ pts.)
- Por concluir la expresión para z en (9) y por ende la de y (0,5 pts.)

****