UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2021
MA2601, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES COORDINADAS

Pauta Control 1.

P1.- Considere un cuerpo flotando en un fluido viscoso bajo la acción de la gravedad. Ante una perturbación del líquido, su desplazamiento vertical con respecto al punto de equilibrio, es modelado por la siguiente ecuación

$$y''(t) - 2\epsilon y'(t) + (\epsilon^2 + \delta^2)y(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty[, \tag{1}$$

donde δ, ϵ son constantes reales y $f(t)$ una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo.

1. Resuelva la ecuación homogénea asociada a la ecuación anterior. Para ello, considere los casos $\delta \neq 0$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$; además, $\delta = 0$ y $\epsilon \neq 0$.
2. Considere $\epsilon = 0$. Utilizando el método de los coeficientes indeterminados resuelva la edo no homogénea para $f(t) = \cos(t)$.
3. Describa el comportamiento de la solución cuando δ tiende a 1.

Solución

1. Sin pérdida de generalidad, consideremos $\delta \geq 0$. Notemos que el polinomio característico asociado a (1) esta dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\epsilon\lambda + \epsilon^2 + \delta^2 \text{ (0.2 pts)}$$

cuyos valores característicos (o raíces) son

$$\lambda_{\pm} = \epsilon \pm i\delta. \text{ (0.3 pts)}$$

Si $\delta = 0$, tenemos que el valor característico es $\lambda = \epsilon$ de multiplicidad dos. Por lo que la solución general de la ecuación homogénea esta dada por

$$y_h(t) = Ae^{\epsilon t} + Bte^{\epsilon t}, \; A, B \in \mathbb{R}. \text{ (0.7 pts)}$$

Por otro lado, si $\delta \neq 0$. Tenemos que los valores característicos son complejos, por lo que la solución general está dada por

$$y_h(t) = Ae^{\epsilon t}\cos(\delta t) + Be^{\epsilon t}\sin(\delta t), \; A, B \in \mathbb{R}. \text{ (0.8 pts)} \tag{2}$$

2. *a*) Considerando $f(t) = \cos(t)$, obtenemos la ecuación

$$(D^2 + \delta^2)y(t) = \cos(t). \tag{3}$$

Por el punto anterior, sabemos que la base del problema homogéneo esta dada por $\{y_1, y_2\}$, donde $y_1(t) = \cos(\delta t)$, $y_2(t) = \sin(\delta t)$. (0.3 pts)

Al aplicar el operador $D^2 + 1$ a la ecuación anterior obtenemos la siguiente ecuación homogénea

$$(D^2 + 1)(D^2 + \delta^2)\tilde{y}(t) = 0. \text{ (0.3 pts)}$$

Tenemos los siguientes casos

I) Si $\delta \neq 1$. Tenemos que la solución general de esta ecuación esta dada por

$$\tilde{y}_h(t) = A\cos(\delta t) + B\sin(\delta t) + C\cos(t) + D\sin(t). \text{ (0.3 pts)} \tag{4}$$

Por lo que, la solución particular de (3) tiene la forma

$$y_p(t) = C\cos(t) + D\sin(t), \text{ (0.3 pts)} \tag{5}$$

donde C y D son constantes reales por determinar. Reemplazando y_p en (3) tenemos que

$$(\delta^2 - 1)y_p(t) = \cos(t). \text{ (0.1 pts)} \tag{6}$$

Así, tenemos que $C = 1/(\delta^2 - 1)$ y $D = 0$. (0.1 pts) Concluimos que la solución general es

$$y(t) = A\cos(\delta t) + B\sin(\delta t) + \frac{1}{\delta^2 - 1}\cos(t), \quad A, B \in \mathbb{R}. \text{ (0.4 pts)}$$

II) Si $\delta = 1$. Tenemos que la solución general de esta ecuación esta dada por

$$\tilde{y}_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + Ct\cos(t) + Dt\sin(t). \text{ (0.3 pts)} \tag{7}$$

Por lo que, la solución particular de (3) tiene la forma

$$y_p(t) = Ct\cos(t) + Dt\sin(t), \text{ (0.3 pts)} \tag{8}$$

donde C y D son constantes reales por determinar. Reemplazando y_p en (3) tenemos que

$$-2C\sin(t) + 2D\cos(t) = \cos(t). \text{ (0.1 pts)} \tag{9}$$

Así, tenemos que $C = 0$ y $D = 1/2$. (0.1 pts) Concluimos que la solución general es

$$y(t) = A\cos(\delta t) + B\sin(\delta t) + \frac{1}{2}t\sin(t), \quad A, B \in \mathbb{R}. \text{ (0.4 pts)}$$

b) De manera alternativa se puede utilizar el método de variación de parámetros para encontrar la solución particular. En este caso consideramos y_p por

$$y_p = e^{\lambda_2 t}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\left(\int e^{-\lambda_1 x}\cos(x)dx\right)dt \quad \text{(0.5 pts)}$$

para $\lambda_1 = i\delta$ y $\lambda_2 = i\delta$ (también se puede cambiar el orden de λ_1 y λ_2 pero el procedimiento es el mismo). De acuerdo a lo visto en cátedra la forma más sencilla de resolver este problema es reemplazar $\cos(x)$ por $(e^{ix}+e^{-ix})/2$:

$$y_p = e^{-i\delta t}\int e^{2i\delta t}\left(\int e^{-i\delta x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}dx\right)dt = \frac{e^{-i\delta t}}{2}\int e^{2i\delta t}\left(\frac{e^{it(1-\delta)}}{(1-\delta)i} - \frac{e^{-it(1+\delta)}}{(1+\delta)i}\right)dt$$

$$= \frac{-e^{i\delta t}}{2}\int\left(\frac{e^{it(1+\delta)}}{(1-\delta)i} - \frac{e^{-it(1-\delta)}}{(1+\delta)i}\right)dt = \frac{e^{-i\delta t}}{2}\left(\frac{e^{it(1+\delta)}}{(1-\delta)(1+\delta)i^2} + \frac{e^{-it(1-\delta)}}{(1+\delta)(1-\delta)i^2}\right)$$

(1.5 pts)

cancelando términos en última expresión obtenemos

$$y_p = -\frac{e^{-i\delta t}}{2}\left(\frac{e^{(1+\delta)ti}}{(1-\delta^2)} + \frac{e^{(1-\delta)ti}}{(1-\delta^2)}\right) = -\frac{\cos(t)}{1-\delta^2}. \quad \text{(1 pts)}$$

3. Para t fijo, tenemos que

$$\lim_{\delta\to 1^+} y(t) = \infty \quad \text{(0.5 pts)}$$

y

$$\lim_{\delta\to 1^-} y(t) = -\infty \quad \text{(0.5 pts)}$$

P2.- Considere la ecuación diferencial a coeficientes variables de orden 2:

$$x^2y''(x) - xy'(x) + 5y(x) = f(x),\ x \in]0,\infty[. \tag{10}$$

1. Utilizando el cambio de variable $z(u) = y(e^u)$ y $x = e^u$, deduzca que la EDO (10) se reduce a la EDO lineal a coeficiente constantes en z con variable independiente u

$$z''(u) - 2z'(u) + 5z(u) = f(e^u).$$

2. Encuentre la solución general de la ecuación no homogénea para $f(x) = x$.
3. Utilizando el método de variación de parametros resuelva la edo no homogénea para $f(x) = x\sec(2\ln(x))$.

Solución

1. Considerando el cambio de variable $z(u) = y(e^u)$ y $x = e^u$, tenemos que

$$\begin{aligned} z'(u) =& e^u y'(e^u), \\ z''(u) =& e^u y'(e^u) + e^{2u} y''(e^u). \end{aligned} \quad \text{(0.3 pts)}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} z'(u) =& xy'(x) \\ z''(u) =& xy'(x) + x^2y''(x) = z'(u) + x^2y''(x). \end{aligned} \quad \text{(0.4 pts)}$$

Reemplazando obtenemos que

$$z''(u) - z'(u) - z'(u) + 5z(u) = x^2y'' - xy' + 5y = f(x) = f(e^u). \quad \text{(0.3 pts)} \tag{11}$$

2. Notamos el operador diferencial asociado a la ecuación es

$$P(D) = D^2 - 2D + 5$$

, cuyas raíces son $\lambda = 1 \pm 2i$ (0.3 pts).

Así, la solución del problema homogéneo esta dado por

$$z_h(u) = Az_1(u) + Bz_2(u) = Ae^u\cos(2u) + Be^u\sin(2u),\ A, B \in \mathbb{R}. \quad \text{(0.3 pts)}$$

Aplicando a la ecuación el operador $(D - 1)$, obtenemos la ecuación homogénea

$$(D - 1)P(D)\tilde{z}(u) = 0. \quad \text{(0.4 pts)}$$

Tenemos que la solución general del problema homogéneo

$$\tilde{z}_h(u) = Ae^u + Be^u\cos(2u) + Ce^u\sin(2u),\ A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Además, la solución asociada al operador $D-1$ es $\tilde{z}(u) = e^u$ (0.3 pts). Por lo que, la solución particular de la ecuación (10) tiene la forma $y_p(x) = e^{ln(x)} = Ax$. Reemplazando la solución particular en (10), tenemos que

$$x^2 y_p'' - xy_p' + 5y_p = (-A + 5A)x = 4Ax$$

Igualando al lado derecho de (10), obtenemos que $A = 1/4$. (0.3 pts)

Concluimos que la solución general del problema no homogenéo esta dada por

$$y(x) = Ax\cos(2\ln(x)) + Bx\cos(2\ln(x)) + \frac{1}{4}x, \; A, B \in \mathbb{R}. \; \text{(0.4 pts)}$$

3. Dado que no es posible utilizar el método de coeficientes indeterminados, utilizaremos el método de variación de parámetros. Utilizando las variables $v_1 = z$ y $v_2 = z'$, nos permiten reescribir la ecuación (11) como un sistema, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(e^u) \end{pmatrix}. \; \text{(0.5 pts)}$$

Tenemos que la matriz fundamental y su inversa están dadas por de este sistema es

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1}(u) = \frac{1}{W(u)} \begin{pmatrix} z_2' & -z_2 \\ -z_1' & z_1 \end{pmatrix} \; \text{(0.5 pts)}$$

donde $W = z_1' z_2 - z_1 z_2' = -2e^{2u}$ (0.3 pts) es el Wronskiano de z_1 y z_2. Buscaremos una solución particular de la forma

$$z_p(u) = F_1(u)z_1(u) + F_2(u)z_2(u), \; \text{(0.2 pts)}$$

donde F_1 y F_2 satisfacen la relación

$$F_1(u) = \int \frac{-z_2(u)f(e^u)}{W(u)}, \; \text{y} \; F_2(u) = \int \frac{z_1(u)f(e^u)}{W(u)}.$$

Reemplazando $f(e^u) = e^u \sec(2u)$, z_1, z_2 y el Wronskiano, obtenemos

$$F_1(u) = \int \frac{\sin(2u)f(e^u)}{2e^u} du = \int \frac{\sin(2u)e^u \sec(2u)}{2e^u} du = \int \frac{\sin(2u)}{2\cos(2u)} du = -\frac{1}{4}\ln(\cos(2u)) \; \text{(0.4 pts)}$$

$$F_2(u) = -\int \frac{\cos(2u)e^u \sec(2u)}{2e^u} du = -\int \frac{\cos(2u)}{2\cos(2u)} du = -\frac{1}{2}u. \; \text{(0.4 pts)}$$

Volviendo a la variable original tenemos que la solución del problema no homogéneo para $f(x) = x\sec(2\ln(x))$ esta dada por

$$\begin{aligned} y(x) =& Ax\cos(2\ln(x)) + Bx\cos(2\ln(x)) \\ &- \frac{1}{4}\ln(\cos(2\ln(x)))\cos(2\ln(x)) - \frac{1}{2}\ln(x)x\cos(2\ln(x)), \; A, B \in \mathbb{R}. \; \text{(0.7 pts)} \end{aligned}$$

P3.- Considere la el problema

$$(py')' + \lambda y = f, \text{ en }]0,1[\quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{12}$$

para $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en todo el intervalo $[0,1]$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y $\lambda \in \mathbb{R}$. Suponga además que $p(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$.

1. (1 pts) Sean y_1, y_2 dos soluciones homogéneas y l.i. de (12). Demuestre que el Wronskiano W asociado a y_1, y_2 es igual a

$$W(x) = \frac{C}{p(x)}, \ \forall x \in]0,1[.$$

para algún $C \neq 0$.

2. Considere el caso $f = 0$. Demuestre que si y es una solución no nula del problema (12), entonces

$$\lambda = \frac{\int_0^1 py'^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}$$

y por lo tanto $\lambda \geq 0$. **Indicación:** Multiplique la ecuación por y y luego integre por partes el término $\int_0^1 (py)' y dx$.

3. Para el caso $p = 1$ y $f = 0$, encuentre todos los posibles valores de λ para los cuales el problema tiene solución y las soluciones no nulas para cada uno de esos valores de λ. Observe que la solución para cada λ no es única, ¿contradice esto el TEU para ecuaciones lineales? Si f no es nula, ¿es única la solución para este caso? Justifique. **Indicación:** Utilizando el item anterior justifique que la solución es de la forma $A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Luego utilice las condiciones de borde adecuadamente para encontrar λ y la solución correspondiente.

Solución

1. La ecuación homogénea asociada a (12) se puede expresar como

$$y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{\lambda}{p}y = 0 \text{ (0.2 pts)}$$

luego utilizando la fórmula de Abel (0.2 pts) obtenemos

$$W(x) = C\exp\left(-\int \frac{p'}{p}dx\right) = C\exp(-\ln(p(x)) \text{ (0.2 pts)} = \frac{C}{p(x)} \text{ (0.2 pts)},$$

donde $C \neq 0$ pues y_1, y_2 son l.i. (0.2 pts)

2. Sea y solución no nula del problema (12) para $f = 0$. Podemos multiplicar la ecuación y luego integrar para obtener que

$$\int_0^1 (py')' y dx + \lambda \int_0^1 y^2 dx = 0. \text{ (0.3 pts)}$$

Integrando por partes y utilizando que $y(0) = y(1) = 0$ obtenemos que

$$-\int_0^1 py'^2 dx + \lambda \int_0^1 y^2 dx = 0. \text{ (0.7 pts)}$$

entonces como y es no nula podemos dividir por $\int_0^1 y^2 dx$ (0.3 pts) para obtener que

$$\lambda = \frac{\int_0^1 py'^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}. \text{ (0.7 pts)}$$

3. Del item anterior sabemos que el problema solo puede tener solución si $\lambda \geq 0$ (0.2 pts) . El caso $\lambda = 0$ nos entrega la solución $y_h = 0$, luego nos interesa el caso $\lambda > 0$ (0.2 pts). Para $\lambda > 0$ la solución homogénea del problema es de la forma

$$y_h = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x). \text{ (0.3 pts)}$$

De la condición $y(0) = 0$ sabemos que $A = 0$. De la condición $y(1) = 0$ deducimos que

$$B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0. \text{ (0.3 pts)}$$

De esto se desprenden dos posibilidades $B = 0$ o $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ (0.2 pts). La primera alternativa solo entrega la solución trivial (0.2 pts). De la segunda deducimos que $\sqrt{\lambda} = k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (0.3 pts). Luego los posibles valores de λ son

$$\lambda_k = k^2\pi^2 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \text{ (0.2 pts)}$$

Para cada k existen infinitas soluciones de la forma $y_k = B\sin(k\pi x)$ para $B \in \mathbb{R}$ (0.2 pts). Esto no contradice el TEU, pues en este teorema establece la unicidad del problema de condiciones iniciales (0.3 pts). Además, podemos observar que si y es solución para el problema no nulo, podemos definir $z = y + y_h$ (0.2 pts) donde y_h es una solución para el caso $f = 0$ y obtener

$$z'' + \lambda z = y_h'' + \lambda y_h + z'' + \lambda z = f. \text{ (0.2 pts)}$$

Por lo tanto el problema no tiene una única solución (0.2 pts).