UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2020
MA2601 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES: 2,3,4,5,6,7.

Control 1-P1

(6,0 pts.) Determinar la solución general de la siguiente EDO de segundo orden

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+e^t}, \; t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Solución:
Recordemos que la solución general de una EDO lineal de segundo orden es de la forma $y_g(t) = y_h(t) + y_p(t)$, donde y_h es solución general de la ecuación homogénea asociada e y_p es una solución particular de la EDO lineal no homogénea.
Notemos que la ecuación homogénea asociada a nuestra EDO es

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \tag{2}$$

cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$. Como las raíces del polinomio p son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$, se sigue que la solución general de la EDO homogénea asociada es

$$y_h(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}, \tag{3}$$

donde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias.
Ahora, debemos hallar una solución particular y lo haremos mediante variación de parámetros. Partamos denotando $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$, $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{-2t}$. En este caso, sabemos que una solución particular tiene la forma

$$y_p(t) = F_1(t)e^{-t} + F_2(t)e^{-2t}, \tag{4}$$

donde las funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$ vienen dadas por

$$F_j(t) = \int \frac{W_j(t)}{W(t)} dt, \quad j = 1, 2, \tag{5}$$

con $W(t)$ el Wonskiano de $y_1(t), y_2(t)$, y

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2t} \\ \frac{1}{1+e^t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = \frac{-e^{-2t}}{1+e^t}. \tag{6}$$

y

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & f(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & \frac{1}{1+e^t} \end{vmatrix} = \frac{e^{-t}}{1+e^t}. \tag{7}$$

Tenemos

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -2e^{-3t} + e^{-3t} = -e^{-3t}. \tag{8}$$

Luego,

$$F_1(t) = \int \frac{W_1(t)}{W(t)} dt = \int \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int \frac{1}{1+u} du = \ln(1+u) = \ln(1+e^t) \tag{9}$$

y

$$F_2(t) = \int \frac{W_2(t)}{W(t)} dt = \int \frac{-e^{2t}}{1+e^t} dt = \int \frac{-u}{1+u} du = \ln(1+u) - u = \ln(1+e^t) - e^t. \tag{10}$$

Observar que en los pasos anteriores no consideramos constantes de integración. De esta forma

$$\begin{aligned} y_p(t) &= F_1(t)y_1(t) + F_2(t)y_2(t) \\ &= e^{-t}\ln(1+e^t) + \left(\ln(1+e^t) - e^t\right) e^{-2t} \\ &= e^{-t}\ln(1+e^t) + e^{-2t}\ln(1+e^t) - e^{-t}. \end{aligned} \tag{11}$$

En conclusión la solución general de la EDO planteado es

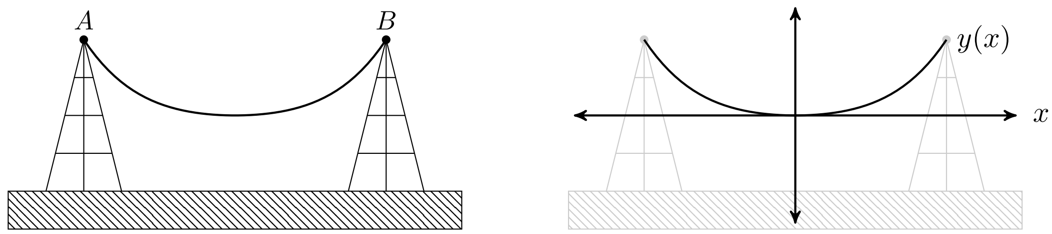
$$\begin{aligned} y_g(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + \ln(1+e^t)\left[e^{-t} + e^{-2t}\right] - e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Puntaje:

- Expresa la ecuación homogénea asociada (2) $(0{,}5$ pts.$)$
- Encuentra el polinomio característico $p(\lambda)$ y sus raíces $(1$ pt.$)$
- Encuentra la solución general de la ecuación homogénea (3) $(1$ pt.$)$
- Propone buscar una solución particular de la forma (4) $(0{,}4$ pts.$)$
- Calcula todos los elementos necesarios para las integrales de $F_1(t)$ y $F_2(t)$ $(1{,}3$ pts.$)$
- Calcula $F_1(t)$ y $F_2(t)$ $(1{,}2$ pts.$)$
- Obtiene la solución particular y_p $(0{,}4$ pts.$)$.
- Obtiene la solución general y_g $(0{,}2$ pts.$)$

Control 1-P2

Desde los extremos A y B de dos torres idénticas se encuentra suspendido un cable homogéneo sometido únicamente a la acción de su propio peso, tal como se muestra abajo en la figura izquierda.



El objetivo de este problema es demostrar que, si colocamos el origen del sistema de coordenadas en la parte más baja del cable, tal como se indica en la figura de la derecha, entonces la forma del cable coincide con el gráfico de la función dada por

$$y(x) = \frac{H}{\omega}\left(\cosh\left(\frac{\omega x}{H}\right) - 1\right),$$

donde ω es el **peso por unidad de largo** en cada punto del cable y H es la magnitud de la **tensión** del cable en su **punto más bajo**. Por ser un cable homogéneo, ω se considera constante.

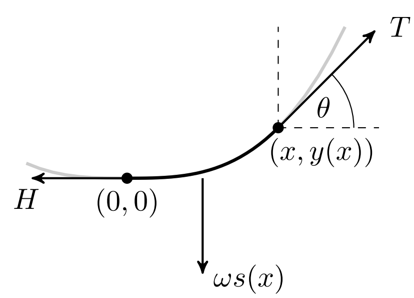
Para demostrar lo pedido considere que la forma del cable es el gráfico de una función suave [1] desconocida $y(x)$, con su punto más bajo en el origen del sistema de coordenadas, y siga los siguientes pasos

1. (0,5 pts.) A partir de las figuras anteriores ¿cuál debería ser el valor de $y'(0)$ y porqué?.

Solución: En $x = 0$ la función y alcanza su mínimo, y por lo tanto $y'(0) = 0$.

Puntaje: Justifica correctamente que $y'(0) = 0$. $(0,5$ pts.).

2. (2,0 pts.) Considere las fuerzas externas actuando sobre todo el segmento de cable que está entre los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(x, y(x))$, cuyo largo denotaremos por $s(x)$. Cada fuerza junto con el valor de su magnitud aparece en la figura a la derecha.
Usando que el cable está en reposo, plantee el equilibrio de fuerzas en sus componentes horizontal y vertical, y a partir de esto deduzca que $y(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial $y'' = \frac{\omega}{H}\sqrt{1 + (y')^2}$.



Ind: Trate de eliminar la magnitud T. Recuerde además que $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt$

[1] Es decir, de una función real derivable con derivada continua.

Solución:
Como la fuerza de magnitud H es horizontal y la fuerza de magnitud $\omega s(x)$ es vertical, al equilibrar fuerzas se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} T\operatorname{sen}(\theta) &= \omega s(x) \\ T\cos(\theta) &= H. \end{aligned} \tag{12}$$

La fuerza de magnitud T actúa en la dirección de la tangente al gráfico de y en el punto $(x, y(x))$. De esto tenemos

$$y'(x) = \operatorname{tg}(\theta). \tag{13}$$

Dividiendo las ecuaciones en (12), y combinando el resultado con (13) obtenemos $y'(x) = \omega s(x)/H$. Usando la fórmula para $s(x)$, la última igualdad se escribe

$$y'(x) = \frac{\omega}{H}\int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt. \tag{14}$$

Derivando y aplicando el teorema fundamental del cálculo concluimos que

$$y''(x) = \frac{\omega}{H}\sqrt{1+(y'(x))^2}. \tag{15}$$

Puntaje:

- Obtiene la relación (12) (0,5 pts.)
- Obtiene la condición (13) (0,5 pts.)
- Obtiene la ecuación (15) (1 pt.)

3. (2,5 pts.) Usando el cambio de variables $u = y'$, encuentre la solución general de la EDO obtenida en la parte anterior.
Ind: Al momento de resolver una de las integrales puede necesitar el cambio de variables $u = \operatorname{senh}(\alpha)$. Recuerde que $1 + \operatorname{senh}^2(\alpha) = \cosh^2(\alpha)$.

Solución:
Aplicando el cambio de variable $u = y'$ a la EDO obtenida en la parte anterior nos queda

$$u'(x) = \frac{\omega}{H}\sqrt{1+u^2(x)}. \tag{16}$$

Como ω y H son constantes, la ecuación a resolver es de variables separables, es decir, debemos resolver

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}} = \frac{\omega}{H}. \tag{17}$$

Al integral esta última ecuación, mediante el cambio de variable $u = \operatorname{senh}(\alpha)$, obtenemos

$$\alpha = \frac{\omega}{H}x + C. \tag{18}$$

De esta forma $u(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{\omega}{H}x + C\right) \Longrightarrow y'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{\omega}{H}x + C\right)$. Así, la solución general de la EDO queda

$$y(x) = \frac{H}{\omega}\cosh\left(\frac{\omega x}{H} + C\right) + D, \tag{19}$$

con C y D constantes.

Puntaje:

- Por obtener (18) (1,5 pts.).
- Por obtener (19) (1 pt.).

4. (1,0 pt.) Finalmente determine $y(x)$ usando la información de y e y' en $x = 0$.

Solución: Como $y'(0) = 0$ por la primera parte, tenemos

$$\operatorname{senh}(C) = 0 \Longrightarrow C = 0.$$

Como $y(0) = 0$ pues el gráfico de y pasa por el origen, tenemos

$$\frac{H}{\omega}\cosh(0) + D = 0 \Longrightarrow D = -\frac{H}{\omega}.$$

Al reemplazar estos valores en la solución general (19) de la parte anterior, obtenemos la expresión pedida.

Puntaje:

- Por usar $y'(0) = 0$ para calcular C (0,5 pts.)
- Por usar $y(0) = 0$ para calcular D (0,5 pts.).

Control 1-P3

Para p, q funciones continuas en un intervalo no trivial[2] $I \subset \mathbb{R}$, considere la EDO de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad . \qquad (*)$$

Sean y, z **soluciones linealmente independientes** de $(*)$ en $\mathcal{C}^2(I)$. Considere $a, b \in I$, con $a < b$ de modo que $y(a) = y(b) = 0$ pero $y(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, es decir, a y b son **ceros consecutivos** de y.

Ind: A lo largo del problema, puede ser útil el teorema del valor intermedio: Para una función real f continua en $[x_1, x_2]$ tal que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen distinto signo, existe un $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x^*) = 0$.

1. (2,0 pts.) Definamos $W(x) := W(y(x), z(x))$ el Wronskiano asociado. Muestre que $W(x)$ nunca es cero y tiene el mismo signo para todo $x \in I$. Encuentre además expresiones para $W(a)$ y $W(b)$.

Solución:

$W(x) \neq 0$, $\forall x \in I$: Pues las soluciones y y z de $(*)$, que es una ecuación homogénea con coeficientes continuos, son linealmente independientes.

$W(x)$ tiene el mismo signo: Se puede ver de dos maneras: La 1ra. por el Teorema de Abel, pues $W(x) = C\exp(\int -p(x)\,dx)$ para $x \in I$ y $C \neq 0$ por la independencia lineal de y, z, entonces $W(x)$ tiene el mismo signo de C para todo $x \in I$. La 2da. viene de la igualdad $W(x) = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$ que, junto con el hecho de que $y, z \in \mathcal{C}^2(I)$, implican que $W(x)$ es una función continua por lo menos. Así que si $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces tiene el mismo signo en todo el intervalo por el teorema del valor intermedio.

$W(a)$ y $W(b)$: De la def de W y como a, b son ceros consecutivos de y, se tiene que

$$\begin{aligned} W(a) &= y(a)z'(a) - z(a)y'(a) \\ &= -z(a)y'(a) \\ W(b) &= y(b)z'(b) - z(b)y'(b) \\ &= -z(b)y'(b). \end{aligned}$$

Puntaje:

- Justifica correctamente que $W \neq 0$ en I (0,8 pts.)
- Justifica, usando algún camino correcto, que W mantiene el signo en I (0,6 pts.)
- Reemplaza correctamente a y b en la fórmula de W (0,2 pts.)
- Aplica $y(a) = y(b) = 0$ para calcular $W(a)$ y $W(b)$ (0,4 pts.)

2. (2,0 pts.) Muestre que $y'(a)$ y $y'(b)$ son reales no nulos y tienen distinto signo.

[2] Es decir, que tiene interior no vacío. Por ende quedan descartados intervalos del tipo $]x_0, x_0[$ ó $[x_0, x_0]$.

Ind: Para ver los signos de $y'(a)$ y $y'(b)$, muestre primero que $y(x)$ tiene el mismo signo para todo $x \in]a,b[$ y después analice los límites laterales $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{y(a+h)-y(a)}{h}$ y $\lim_{k\to 0^-} \dfrac{y(b+k)-y(b)}{k}$.

Solución:

<u>$y'(a) \neq 0$ y $y'(b) \neq 0$:</u> Como $W(a) = -z(a)y'(a)$ y $W(b) = -z(b)y'(b)$ y $W(x)$ no se anula en I, entonces $y'(a)$ e $y'(b)$ no pueden anularse.

Ahora seguimos la indicación. Primero, como $y(x) \neq 0$ en $]a,b[$ e y es continua, entonces tiene el mismo signo en todo ese intervalo por el teorema del valor intermedio.

Como y es diferenciable en I se tiene:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{y(a+h)-y(a)}{h} = y'(a)$$
$$\lim_{k\to 0^-} \frac{y(b+k)-y(b)}{k} = y'(b)$$

Para todo $h > 0$ y $k < 0$ suficientemente pequeños, $a+h$ y $b+k$ pertenecen a $]a,b[$ y por lo tanto $y(a+h)$ e $y(b+k)$ tienen el mismo signo. Así,

$$\frac{y(a+h)-y(a)}{h} = \frac{y(a+h)}{h} \quad \text{y}$$
$$\frac{y(b+k)-y(b)}{k} = \frac{y(b+k)}{k}$$

tienen signos opuestos. Al tomar los límites cuando $h \to 0^+$ y $k \to 0^-$, y como ninguno de estos límites se anula, se concluye que $y'(a)$ e $y'(b)$ tienen signos opuestos.

Puntaje:

- Usa las expresiones de $W(a)$ y $W(b)$ para concluir que y' en a y b no se anulan (0,5 pts.)
- Usa la continuidad de y para mostrar que tiene un mismo signo en todo $]a,b[$ (0,3 pts.)
- Cada límite lateral lo asocia a la derivada correcta (0,5 pts.)
- Usa que $y(a) = y(b) = 0$ y que $y'(a)$ e $y'(b)$ no se anulan (0,4 pts.)
- Analiza los signos en cada expresión asociada a los límites laterales (0,3 pts.)

3. (2,0 pts.) Muestre que $z(a)$ y $z(b)$ no son nulas y tienen distinto signo. Concluya que existe un único $c \in]a,b[$ de modo que $z(c) = 0$.

Solución:

<u>$z(a) \neq 0$ y $z(b) \neq 0$:</u> Como $W(a) = -z(a)y'(a)$ y $W(b) = -z(b)y'(b)$ y $W(x)$ no se anula en I, entonces $z(a)$ e $z(b)$ no pueden anularse.

<u>Signos:</u> De la parte anterior sabemos que $y'(a)$ e $y'(b)$ tienen distinto signo. Procederemos

por contradicción. Supongamos que $z(a)$ y $z(b)$ tienen el mismo signo.

$$\begin{aligned} z(a), z(b) \text{ de igual signo} &\Longrightarrow z(a)y'(a), z(b)y'(b) \text{ de distinto signo} \\ &\Longrightarrow W(a), W(b) \text{ de distinto signo,} \end{aligned}$$

y esto último contradice lo visto en la 2da parte, que $W(x)$ tiene el mismo signo para todo $x \in I$. Por lo tanto $z(a)$ y $z(b)$ deben tener signos opuestos.

Existencia de c: Aplicamos el teorema del valor intermedio a la función z, que es continua en I. Como $z(a)$ y $z(b)$ tienen distinto signo (o sea, uno de ellos es negativo y el otro positivo) entonces z se anula entre a y b, es decir, existe $c \in]a, b[$ tal que $z(c) = 0$.

Unicidad de c: Procedemos por contradicción. Si existe más de un cero de z en el intervalo $]a, b[$ entonces tomemos dos consecutivos, es decir, c_1 y c_2 tales que $c_1 < c_2$, $z(c_1) = z(c_2) = 0$ y $z(x) \neq 0$ para todo $x \in]c_1, c_2[$. Aplicando todo lo anterior pero cambiando los roles de y y z, y cambiando $]a, b[$ por $]c_1, c_2[$ podemos concluir que existe $d \in]c_1, c_2[$ tal que $y(d) = 0$. Pero como $d \in]a, b[$, esto contradice que $y(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$. Así que c es único.

Puntaje:

- Usa las expresiones de $W(a)$ y $W(b)$ para concluir que z en a y b no se anulan (0,5 pts.)
- Usa que $y'(a)$ e $y'(b)$ tienen signos opuestos, mientras que $W(a)$ y $W(b)$ tienen el mismo signo para concluir sobre los signos de $z(a)$ y $z(b)$ (0,6 pts.)
- Usa la continuidad de z para concluir la existencia de c (0,4 pts.)
- Cambia los roles de y y z para concluir la unicidad de c (0,5 pts.)