

P1.

(a) (3 puntos) Sabiendo que la proposición

$$\neg[(s \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r] \Rightarrow [(p \vee q) \wedge r]$$

es falsa, determine el valor de verdad de p, q, r y s .

(b) (3 puntos) Considere la sucesión de reales u_n dada por

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \end{cases}$$

demuestre usando inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n = 2^n + 1)$$

Solución

(a)

- (0.5 puntos) Si $\neg[(s \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r] \Rightarrow [(p \vee q) \wedge r]$ es falsa se deduce que

$$\neg[(s \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r] \equiv V \wedge [(p \vee q) \wedge r] \equiv F$$

- (0.2 puntos) Si $\neg[(s \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r] \equiv V$ se deduce que

$$(s \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r \equiv F$$

- (0.5 puntos) Si $(s \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r \equiv F$ se deduce que

$$(s \Leftrightarrow \neg q) \equiv V \wedge \neg r \equiv F$$

- (0.2 puntos) Si $\neg r \equiv V$ se deduce que

$$r \equiv V$$

- (0.5 puntos) Si $r \equiv V$ y $[(p \vee q) \wedge r] \equiv F$ se deduce que

$$p \vee q \equiv F$$

- (0.5 puntos) Si $(p \vee q) \equiv F$ se deduce que

$$p \equiv F \wedge q \equiv F$$

- (0.6 puntos) Si $(s \Leftrightarrow \neg q) \equiv V$ y $\neg q \equiv V$ se deduce que

$$s \equiv V$$

En resumen

$$p \equiv F$$

$$q \equiv F$$

$$r \equiv V$$

$$s \equiv V$$

(b) **Caso base.** $n = 0$ y $n = 1$. Notamos que por definición $u_0 = 2$ y $u_1 = 3$, mientras que la fórmula nos indica

$$\begin{cases} u_0 = 2^0 + 1 = 2 & (0.5 \text{ puntos}) \\ u_1 = 2^1 + 1 = 3 & (0.5 \text{ puntos}) \end{cases}$$

lo cual es consistente, por lo tanto se cumple el caso base.

Hipótesis de inducción. Asumamos que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\underbrace{u_n = 2^n + 1}_{(0.5 \text{ puntos})} \wedge \underbrace{u_{n-1} = 2^{n-1} + 1}_{(0.5 \text{ puntos})} \right)$$

Paso inductivo. Debemos mostrar que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = 2^{n+1} + 1) \text{ (0.5 puntos)}$$

Para ello, sabemos que por definición que

$$u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$$

y al usar la hipótesis de inducción llegamos a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2u_{n-1} \\ &= 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) \\ &= 3 \cdot 2^n + 3 - 2^n - 2 \\ &= 2 \cdot 2^n + 1 \\ &= 2^{n+1} + 1 \text{ (0.5 puntos)} \end{aligned}$$

P2.

Sean X e Y dos conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Se define

$$\begin{aligned} F : X \times X &\rightarrow Y \times Y \\ (x_1, x_2) &\mapsto F(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) \end{aligned}$$

(a) (2 puntos) Muestre que f es inyectiva si y solo si F es inyectiva y que f es epiyectiva si y solo si F es epiyectiva.

(b) (2 puntos) Muestre que la afirmación

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(X))(F(A \times B) = f(A) \times f(B))$$

es verdadera.

(c) (2 puntos) Muestre que la afirmación

$$(\forall C, D \in \mathcal{P}(Y))(F^{-1}((C \times D)^c) = (f^{-1}(C) \times f^{-1}(D))^c$$

es verdadera.

Solución

(a) **Inyectividad.** Mostremos la doble implicancia, partiendo por $\Rightarrow$. Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X \times X$ se tiene que

$$\begin{aligned} F(a_1, b_1) = F(a_2, b_2) &\implies (f(a_1), f(b_1)) = (f(a_2), f(b_2)) & (0.2 \text{ puntos}) \\ &\implies f(a_1) = f(a_2) \wedge f(b_1) = f(b_2) \\ &\implies a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 & (0.2 \text{ puntos}) \\ &\implies (a_1, b_1) = (a_2, b_2) & (0.1 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

Lo que muestra que F es inyectiva.

Mostremos ahora la inversa $\Leftarrow$. Sea $(a, b) \in X \times X$ y tomemos (a_0, b_0) fijo. Si asumimos que F es inyectiva, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} F(a, a_0) = F(b, b_0) &\implies (a, a_0) = (b, b_0) & (0.2 \text{ puntos}) \\ (f(a), f(a_0)) = (f(b), f(b_0)) &\implies a = b \wedge a_0 = b_0 & (0.1 \text{ puntos}) \\ f(a) = f(b) \wedge f(a_0) = f(b_0) &\implies a = b \wedge a_0 = b_0 & (0.1 \text{ puntos}) \end{aligned}$$

En particular, y fijando nuestra atención únicamente en el par (a, b) se llega a

$$f(a) = f(b) \implies a = b \text{ (0.1 puntos)}$$

es decir f es inyectiva.

Epiyectividad. Mostremos la doble implicancia, partiendo por $\Rightarrow$. Sea $(y_1, y_2) \in Y \times Y$. Dado que f es epiyectiva, se tiene que existen x_1, x_2 tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, (0.3 puntos) luego

$$F(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2) \text{ (0.2 puntos)}$$

lo que indica que F es epiyectiva. Mostremos ahora la inversa $\Leftarrow$. Sean $y \in Y$ y $y_0 \in Y$ fijo. Dado que F es epiyectiva, se tiene que existe (x, x_0) tal que $F(x, x_0) = (y, y_0)$ (0.1 puntos),

$$\begin{aligned}
 (\exists(x, x_0) \in X \times X)(F(x, x_0) = (y, y_0)) &\implies (\exists(x, x_0) \in X \times X)(f(x), f(x_0)) = (y, y_0) \quad (0.2 \text{ puntos}) \\
 &\implies (\exists(x, x_0) \in X \times X)(f(x) = y \wedge f(x_0) = y_0) \quad (0.1 \text{ puntos})
 \end{aligned}$$

En particular, fijando nuestra atención en x se tiene que

$$(\exists x \in X)(f(x) = y) \quad (0.1 \text{ puntos})$$

es decir f es epiyectiva.

(b) Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Si $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ es tal que $(y_1, y_2) \in F(A \times B)$ se tiene que $\exists(x_1, x_2) \in A \times B$ tal que

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2) = (y_1, y_2) &\implies (f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2) \quad (0.4 \text{ puntos}) \\
 &\implies f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2 \quad (0.2 \text{ puntos}) \\
 &\implies y_1 \in f(A) \wedge y_2 \in f(B) \quad (0.2 \text{ puntos}) \\
 &\implies (y_1, y_2) \in f(A) \times f(B) \quad (0.2 \text{ puntos})
 \end{aligned}$$

esto dice que $F(A \times B) \subseteq f(A) \times f(B)$. Inversamente, sea $(y_1, y_2) \in f(A) \times f(B)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 y_1 \in f(A) \wedge y_2 \in f(B) &\implies (\exists x_1 \in A)(f(x_1) = y_1) \wedge (\exists x_2 \in B)(f(x_2) = y_2) \quad (0.4 \text{ puntos}) \\
 &\implies (\exists(x_1, x_2) \in A \times B)((f(x_1), f(x_2)) = (y_1, y_2)) \quad (0.2 \text{ puntos}) \\
 &\implies (\exists(x_1, x_2) \in A \times B)(F(x_1, x_2) = (y_1, y_2)) \quad (0.2 \text{ puntos}) \\
 &\implies (y_1, y_2) \in F(A \times B) \quad (0.2 \text{ puntos})
 \end{aligned}$$

Lo de arriba dice que $f(A) \times f(B) \subseteq F(A \times B)$. Dado que hemos probado la doble contención, se tiene que

$$F(A \times B) = f(A) \times f(B)$$

(c) Sea

$$(x_1, x_2) \in F^{-1}((C \times D)^c)$$

Esto significa que

$$(f(x_1), f(x_2)) \notin C \times D \implies f(x_1) \notin C \vee f(x_2) \notin D \quad (0.4 \text{ puntos})$$

Por definición de preimagen, esto implica:

$$x_1 \notin f^{-1}(C) \vee x_2 \notin f^{-1}(D) \quad (0.3 \text{ puntos})$$

Por lo tanto,

$$(x_1, x_2) \notin f^{-1}(C) \times f^{-1}(D) \implies (x_1, x_2) \in (f^{-1}(C) \times f^{-1}(D))^c \quad (0.3 \text{ puntos})$$

En definitiva $F^{-1}((C \times D)^c) \subseteq (f^{-1}(C) \times f^{-1}(D))^c$. Inversamente, el análisis es similar, de hecho todas las implicancias de arriba se invierten, en detalle:

$$\begin{aligned}
 (x_1, x_2) \in (f^{-1}(C) \times f^{-1}(D))^c &\implies (x_1, x_2) \notin f^{-1}(C) \times f^{-1}(D) \quad (0.3 \text{ puntos}) \\
 &\implies x_1 \notin f^{-1}(C) \vee x_2 \notin f^{-1}(D) \quad (0.3 \text{ puntos}) \\
 &\implies (f(x_1), f(x_2)) \notin C \times D \quad (0.2 \text{ puntos}) \\
 &\implies (x_1, x_2) \in F^{-1}((C \times D)^c) \quad (0.2 \text{ puntos})
 \end{aligned}$$

P3.

Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definamos $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación R mediante

$$A R B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(a) (1.5 puntos) Muestre que R es una relación de orden. Muestre que es una relación de orden total si $n = 1$, y que es parcial si $n > 1$.

(b) (1.4 puntos) Decida si R tiene elementos máximos o mínimos y si estos son únicos o no.

(c) (0.8 puntos) Realice un diagrama de Hasse de R considerando $n = 3$.

(d) Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ dados por $A = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ y $B = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ con $x_1 < x_2 < \dots < x_j$ e $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ diremos que $A < B$ si $(\exists i_0 \in E)$ tal que

- $(\forall i < i_0)(x_i = y_i)$

- $x_{i_0} < y_{i_0}$. Diremos que $A \leq B$ si $A < B \vee A = B$.

(por ejemplo $\{1, 2, 3\} < \{1, 2, 4, 5\}$ pues los elementos están ordenados en forma creciente y coinciden hasta obtener una diferencia en la tercera posición)

En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación S mediante

$$A S B \Leftrightarrow (|A| < |B|) \vee (|A| = |B| \wedge A \leq B)$$

(i) (1.5 puntos) Se sabe que S es una relación de orden (no es necesario mostrarlo). Muestre que S es extensión de la relación de orden parcial R , es decir muestre

* S es una relación de orden total

* $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))(A R B \Rightarrow A S B)$

(ii) (0.8 puntos) Asuma que $n = 3$. Sobre el diagrama de Hasse de R encontrado anteriormente, realice un diagrama de Hasse de S .

Solución

(a) **Reflexividad.** (0.3 puntos) La relación $\subseteq$ es reflexiva si para todo conjunto A , se cumple que:

$$A \subseteq A$$

Esto es cierto porque, por definición, todo elemento de A pertenece a A . Por lo tanto, $A \subseteq A$ es siempre verdadero.

Antisimetría. (0.3 puntos) La relación $\subseteq$ es antisimétrica si, para todos los conjuntos A y B , se cumple que:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

Esto es cierto porque, si $A \subseteq B$, entonces todo elemento de A pertenece a B , y si $B \subseteq A$, todo elemento de B pertenece a A , por lo que $A = B$.

Transitividad. (0.3 puntos) La relación $\subseteq$ es transitiva si, para todos los conjuntos A , B y C , se cumple que:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

Esto es cierto porque, si $A \subseteq B$, entonces todo elemento de A pertenece a B . Si además $B \subseteq C$, entonces todo elemento de B pertenece a C . Por lo tanto, todo elemento de A pertenece a C , lo que implica $A \subseteq C$.

Relación de orden total. (0.3 puntos) Notamos que si $n = 1$ entonces $E = \{1\}$ y por tanto $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Por lo que la única opción es comparar $\emptyset$ con $\{1\}$ o viceversa. Dado que $\emptyset \subseteq \{1\}$ se tiene que $\emptyset R \{1\}$, por lo tanto R es total.

Relación de orden parcial. (0.3 puntos) Si $n > 1$ entonces $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ son tales que $A, B \in \mathcal{P}(E)$, pero $\{1\} \not\subseteq \{2\} \wedge \{2\} \not\subseteq \{1\}$ por lo que $\{1\} \not R \{2\} \wedge \{2\} \not R \{1\}$, lo que indica que $\{1\}$ y $\{2\}$ no se pueden comparar y por lo tanto R es parcial.

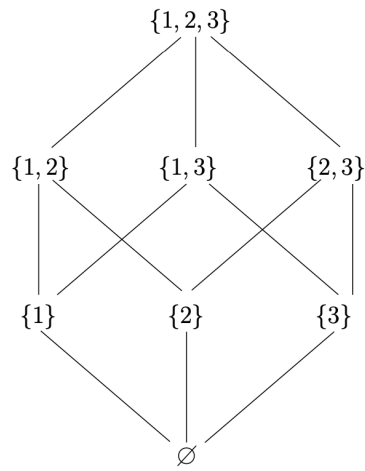
(b) **Elemento máximo.** E es elemento máximo pues $(\forall A \in \mathcal{P}(E))(A \subseteq E)$ es decir $(\forall A \in \mathcal{P}(E))(A R E)$ (0.4 puntos).

Este elemento es único, pues de existir otro elemento E' tal que $(\forall A \in \mathcal{P}(E))(A R E')$ se tendría que $E R E'$ y al mismo tiempo $E' R E$ por lo que $E = E'$. (0.3 puntos)

Elemento mínimo. $\emptyset$ es elemento mínimo pues $(\forall A \in \mathcal{P}(E))(\emptyset \subseteq A)$ es decir $(\forall A \in \mathcal{P}(E))(\emptyset R A)$. (0.4 puntos)

Este elemento es único, pues de existir otro elemento $\emptyset'$ tal que $(\forall A \in \mathcal{P}(E))(\emptyset' \subseteq A)$ se tendría que $\emptyset R \emptyset'$ y al mismo tiempo $\emptyset' R \emptyset$ por lo que $\emptyset = \emptyset'$. (0.3 puntos)

(c) (0.8 puntos) Para $n = 3$ se tiene que $E = \{1, 2, 3\}$ por lo tanto un diagrama de Hasse puede ser



(d)

(i) **Relación de orden total.** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Hay tres opciones

- $|A| < |B|$. (0.2 puntos) En este caso por definición de S se tiene que ASB .
- $|B| < |A|$. (0.2 puntos) En este caso por definición de S se tiene que BSA .
- $|A| = |B|$. En este caso hay dos opciones:
 - $A = B$, (0.2 puntos) y en tal caso $A \leq B$ y por tanto ASB
 - $A \neq B$. (0.4 puntos) En este último caso podemos asumir sin perder generalidad que los elementos de A y B están ordenados en forma creciente, es decir $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, con $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ y $B = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ con $y_1 < y_2 < \dots < y_k$, dado que $A \neq B$ existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$ para el cual $(\forall i < i_0)(x_i = y_i)$ y $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, de esta forma $x_{i_0} > y_{i_0}$ o bien $x_{i_0} < y_{i_0}$, si ocurre lo primero entonces $A < B$ y por tanto ASB y si ocurre lo segundo entonces $B < A$ y por tanto BSA .

En cualquiera de todos los casos, se tendrá que o bien ASB o BSA , lo que dice que S es un orden total.

Extensión. Supongamos que $A R B$, es decir $A \subseteq B$. Hay dos opciones $A \subseteq B$ con $A \neq B$, en tal caso $|A| < |B|$ y por tanto ASB (0.3 puntos) y el otro caso es que $A = B$ en tal caso $|A| = |B|$ y $A \leq B$ por lo que también se tiene que ASB (0.2 puntos)

(ii) (0.8 puntos)

