Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101 - Introducción al Álgebra. Primavera 2023.
29 de septiembre

# CONTROL 1

**Nota:** Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos; si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

**P1.** *a*) (3 pts.) Sean $p, q, r$ y $s$ proposiciones lógicas. Demuestre por contradicción la siguiente tautología.

$$\{[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow s\} \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow s)].$$

**Solución**

Procediendo por contradicción se tiene que

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow s$ es V y $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow s)$ es F ........................**0.3 pts.**
$\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow s$ es V y $(q \Rightarrow r)$ es V y $(p \Rightarrow s)$ es F ........................**0.3 pts.**
$\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow s$ es V y $(q \Rightarrow r)$ es V y $p$ es V y $s$ es F........................**0.3 pts.**
$\Rightarrow [(V \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow F$ es V y $(q \Rightarrow r)$ es V ........................**0.3 pts.**
$\Rightarrow [(V \Rightarrow q) \Rightarrow r]$ es F y $(q \Rightarrow r)$ es V ........................**0.3 pts.**
$\Rightarrow (V \Rightarrow q)$ es V y $r$ es F y $(q \Rightarrow r)$ es V ........................**0.3 pts.**
$\Rightarrow q$ es V y $r$ es F y $(q \Rightarrow r)$ es V ........................**0.3 pts.**
$\Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es F y $(q \Rightarrow r)$ es V ........................**0.3 pts.**
$\Leftrightarrow F$ ........................**0.3 pts.**

Se concluye que la proposición es una tautología ya que, asumiendo que la negación es verdadera, se llegó a una contradicción. **0.3 pts.**

**Comentarios para corrección**

Si no se hizo paso a paso, poner puntaje por bloques.

*b*) Considere los conjuntos $A = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y la siguiente función proposicional para $\varepsilon \in A$ y $n, N \in B$:

$$P(\varepsilon, N, n) : n \geq N \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas

1) (1 pt.) $\forall n \in B, P(\frac{1}{4}, 8, n)$.
2) (2 pts.) $\forall \varepsilon \in A, \exists N \in B, \forall n \in B, P(\varepsilon, N, n)$.

Solución

1) Notemos que $\frac{2}{8+1} = \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$. Por otra parte, notemos que para todo $n \in B$,

$$n \geq 8 \Leftrightarrow n+1 \geq 8+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{8+1} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{8+1},$$

y por lo tanto $n \geq 8 \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{4}$, que es lo que se quería demostrar.

2) Notemos que, para $\varepsilon = \frac{1}{4} \in A$, existe $N = 8 \in B$ tal que

$$\frac{2}{N+1} = \frac{2}{8+1} = \frac{2}{9} < \varepsilon < \frac{1}{2} < 1,$$

y por lo tanto,

$$\frac{2}{N+1} < \varepsilon, \forall \varepsilon \in A.$$

Por otra parte, notemos que si $N \in B$, entonces, para todo $n \in B$,

$$n \geq N \Leftrightarrow n+1 \geq N+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N+1}.$$

Así, se tiene que, para todo $\varepsilon \in A$, existe $N = 8 \in B$ tal que, para todo $n \in B$,

$$n \geq N \Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N+1} < \varepsilon.$$

Puntajes y comentarios para corrección

En la 1), por la desigualdad $\frac{2}{8+1} < \frac{1}{4}$**0.4 pts.**, por la implicancia $n \geq 8 \Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{8+1}$ **0.4 pts.** y por conlcuir **0.2 pts.** En la 2), encontrar $N$ para $\varepsilon$ **1.2 pt.**, por argumentar que $n \geq N \Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N+1}$ **0.4 pts.** y por concluir **0.4 pts.**

Si lo hizo caso a caso, se reparten los 1.2 pts. del $N$ arriba en 0.4 pts. por cada $\varepsilon$.

Lo importante acá es evaluar el uso de cuantificadores principalmente (más que la manipulación de desigualdades), por lo tanto asignar puntaje completo por argumentos del tipo "$N = 8$ sirve pues para cualquier $n$ mayor o igual que 8, los números $\frac{2}{n+1}$ se van achicando", etc.

**P2.** *a*) Considere la secuencia de números dada por $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Por ejemplo, $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

1) (0.5 pts.) Encuentre una formula recursiva para $H_n$.

**Solución**

Notemos que $H_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ **0.3 pts.** , y por lo tanto, la secuencia se puede definir recursivamente mediante $H_1 = 1$, $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ para $n \geq 1$. **0.2 pts.**

**Comentarios para corrección**

Asignar solo **0.4 pts.** si no pone bien los subíndices (por ejemplo $H_0 = 1$, $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ para $n \geq 1$).

2) (2.5 pts.) Demuestre por inducción que, para todo $n \geq 1$,

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = (n+1)H_n - n.$$

**Solución**

Definimos la función proposicional $P(n) : H_1 + H_2 + \cdots + H_n = (n+1)H_n - n$. Notemos que $P(1) : H_1 = 1 = (1+1)\cdot 1 - 1 = (1+1)H_1 - 1$ es verdadera. **0.6 pts.** Supongamos ahora que $P(n)$ es verdadera (H.I.) y probemos que $P(n+1) : H_1 + H_2 + \cdots + H_n + H_{n+1} = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$ es verdadera. En efecto,

$$\begin{aligned}
(n+2)H_{n+1} - (n+1) &\overset{\text{def } H_{n+1}}{=} (n+1+1)\left(H_n + \frac{1}{n+1}\right) - (n+1)\text{.....}\textbf{0,6pts.}\\
&= (n+1)H_n + H_n + 1 + \frac{1}{n+1} - (n+1)\\
&= (n+1)H_n - n + H_n + \frac{1}{n+1}\text{................}\textbf{0,5pts.}\\
&\overset{\text{H.I., def } H_{n+1}}{=} H_1 + H_2 + \cdots H_n + H_{n+1}\text{.....................}\textbf{0,5pts.}
\end{aligned}$$

Concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$. **0.3 pts.**

Otra forma de hacer el paso inductivo es

$$\begin{aligned}
H_1 + \cdots + H_n + H_{n+1} &\overset{\text{H.I.}}{=} (n+1)H_n - n + H_{n+1}\text{.........................}\textbf{0,6pts.}\\
&= (n+1)\left(H_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + H_{n+1}\\
&\overset{\text{def } H_{n+1}}{=} (n+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + H_{n+1}\text{...}\textbf{0,6pts.}\\
&= (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1}\\
&= (n+2)H_{n+1} - (n+1)\text{.........................}\textbf{0,4pts.}
\end{aligned}$$

**Comentarios para corrección**

No es necesario tener la formula recursiva en a) para hacer la b). Si trabaja la igualdad en $P(n+1)$ y llega a la igualdad $P(n)$ asignar el puntaje total solo si hace mención a que se llega a que son proposiciones equivalentes y que, como $P(n)$ es verdadera, se tiene que $P(n+1)$ también lo es.

*b*) Sea $E$ un conjunto no vacío, y sean $X, Y, A, B, C \subseteq E$, con $C = (A \cup B)^c$.

1) (1 pt.) Demuestre que $X \cap Y = \emptyset \iff X \triangle Y = X \cup Y$. [Sugerencia: recuerde que la diferencia simétrica se puede caracterizar mediante $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.]

2) (2 pts.) Demuestre que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \iff A \cap B = \emptyset.$$

[Sugerencia: use inciso anterior.]

Solución

**1)**

$\Rightarrow$: Si $X \cap Y = \emptyset$ tenemos

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus \emptyset = X \cup Y.$$

**0.5 pts.** por utilizar correctamente la equivalencia $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, y argumentar la diferencia con el conjunto vacío.

$\Leftarrow$: Supongamos ahora que $X \triangle Y = X \cup Y$, entonces tenemos

$$(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = X \triangle Y = X \cup Y.$$

por lo que debemos tener que $X \cap Y = \emptyset$.
**0.5 pts.** por utilizar correctamente la equivalencia $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ y deducir que $X \cap Y = \emptyset$.

**2)** Notemos que $A \triangle B \subseteq A \cup B$, y como $C = (A \cup B)^c$, entonces $A \triangle B$ y $C$ son disjuntos, y por el inciso anterior tenemos

$$(A \triangle B) \triangle C = (A \triangle B) \cup C.$$

**0.4 pts.** por notar que los conjuntos $A \triangle B$ y $C$ son disjuntos, y por utilizar el resultado del inciso anterior

$\Rightarrow$: Tenemos $(A \triangle B) \triangle C = (A \triangle B) \cup C = A \cup B \cup C$, implicando que

$$A \triangle B = A \cup B,$$

y por el inciso anterior tenemos $A \cap B = \emptyset$, como queríamos.
**0.7 pts.** por el desarrollo correcto y concluir lo pedido en esta implicancia

$\Leftarrow$: Como $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $A \triangle B = A \cup B$, y por tanto

$$(A \triangle B) \triangle C = (A \triangle B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

**0.7 pts.** por el desarrollo correcto y concluir lo pedido en esta implicancia

Se concluye que

$$(A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \iff A \triangle B = \emptyset.$$

**0.2 pts.** por concluir

Comentarios para corrección

En el inciso 1) se podría proceder utilizando la definición de diferencia simétrica: $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, en dicho caso asigne el puntaje correspondiente si el desarrollo es correcto.

**P3.** *a*) Sea $f : A \to B$ una función, con $A$ y $B$ conjuntos no vacíos.

1) (2 pts.) Dado $b \in B$, sea $S_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Considere la familia

$$\mathcal{S} = \big\{S_b \mid b \in B\big\}.$$

Determine las condiciones sobre $f$ para que $\mathcal{S}$ sea una partición de $A$.

**Solución**

Recordemos que para que $\mathcal{S}$ sea una partición de $A$ se debe cumplir que

(i) $\emptyset \notin \mathcal{S}$,

(ii) $\cup_{S_b \in \mathcal{S}} S_b = A$,

(iii) $S_{b_1} \cap S_{b_2} = \emptyset$ para todo $b_1, b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$.

**0.2 pts.**

• Para ver que $(i)$ se cumple se debe satisfacer que la función $f$ sea epiyectiva ya que existe $b \in B$ tal que $S_b = \emptyset$ si y solo si, no existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$, lo que equivale a que $f$ no sea epiyectiva. **0.6 pts.**

• Para mostrar $(ii)$ considere lo siguiente. Claramente se cumple que

$$\bigcup_{S_b \in \mathcal{S}} S_b \subseteq A$$

porque $\forall S_b \in \mathcal{S}, S_b \subseteq A$. Veámos ahora la otra contención. Tome $a \in A$ arbitrario, tenemos que $b = f(a)$ está definido porque $f$ es función, entonces $a \in S_b$, y por tanto

$$a \in S_b \subseteq \bigcup_{S_b \in \mathcal{S}} S_b,$$

lo cual implica que $A \subseteq \bigcup_{S_b \in \mathcal{S}} S_b$. Por tanto, $(ii)$ se cumple por el hecho de que $f$ es función. **0.6 pts.**

• Consideremos ahora la condición $(iii)$. Notemos que $a \in S_{b_1} \cap S_{b_2}$ si y solo si $b_1 = f(a) = b_2$. Por lo tanto, por el hecho de que $f$ es función se tiene que $S_{b_1} \cap S_{b_2} = \emptyset$ si $b_1 \neq b_2$. **0.6 pts.**

**Comentarios para corrección**

No es necesario enunciar explícitamente las tres condiciones para que $\mathcal{S}$ sea partición, pero si en el desarrollo se argumenta correctamente las tres condiciones, entonces se le asigna el **0.2 pts** correspondiente.
Para el inciso $(ii)$ se puede obviar la primera contención, y sería suficiente con mostrar la segunda contención de que $A$ está contenido en la unión.
Para la condición $(iii)$ se podría proceder por contradicción, asigne el puntaje correspondiente si el desarrollo es correcto.

2) (1 pt.) Encuentre una función $f$ de modo que el conjunto $\mathcal{S}$ definido en el inciso anterior no sea una partición de $A$. Explique sus argumentos para la elección de la función $f$.

**Solución**

Por el inciso anterior sabemos que basta con definir una función $f$ que no sea epiyectiva para que la familia $\mathcal{S}$ no sea partición de $A$. Por ejemplo, se puede tomar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = c$, para alguna constante $c$. En este caso tenemos que para cualquier $c' \neq c$, $S_{c'} = \emptyset$, y por tanto $\emptyset = S_{c'} \in \mathcal{S}$. Se concluye que $\mathcal{S}$ no es una partición de $A$.
**0.5 pts.** por hacer una buena elección de $f$
**0.5 pts.** por mostrar que la función no es epiyectiva

Otros ejemplos de funciones no epiyectivas que se pueden tomar son: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \sin(x)$.

**Comentarios para corrección**

Se podría tomar alguna función con dominio y codominio diferente de los reales, como los naturales, por ejemplo, lo importante es que dicha función sea no epiyectiva, argumentando correctamente este hecho.

b) Dados $a, b$ números reales, definimos las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : [0, \infty) \to [b, \infty)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = ax + 5, \qquad g(y) = b + 2y^2.$$

Definimos la función $h : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R} \times [b, \infty)$ como sigue:

$$h(x, y) = (f(x), g(y)).$$

1) (2.5 pts.) Demuestre que $h$ es biyectiva si y solo si $a \neq 0$.

**Solución**

Dado que $h$ es biyectiva si y solo si $f$ y $g$ lo son (ver guía 4), entonces se puede cambiar en el enunciado "$h$ biyectiva" por "$f$ y $g$ biyectivas". **0.4 pts.**

**Para $\boldsymbol{f}$** : Notemos que si $a = 0$, $f(x) = 5$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (función constante) que claramente no es inyectiva (ni epiyectiva), y por tanto no es biyectiva. **0.3 pts.**

Tomemos $a \neq 0$, vamos a mostrar que $f(x)$ es biyectiva. Sea $x' \in \mathbb{R}$ arbitrario, entonces, para $x = \frac{x'-5}{a}$ tenemos que

$$f(x) = f\left(\frac{x'-5}{a}\right) = a\left(\frac{x'-5}{a}\right) + 5 = x' - 5 + 5 = x'.$$

Lo anterior nos dice que $f$ es epiyectiva. **0.4 pts.** La inyectividad se obtiene de las equivalencias $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + 5 = ax_2 + 5 \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$. **0.3 pts.**

Del cálculo para la epiyectividad se obtiene que $f^{-1}(x') = \frac{x'-5}{a}$.

**Para $\boldsymbol{g}$** : Consideramos $y' \in [b, \infty)$ arbitrario. Veamos que la ecuación $g(y) = y'$ tiene solución única $y \in [0, \infty)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
g(y) = y' \quad &\Leftrightarrow \quad b + 2y^2 = y' \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{y'-b}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{y'-b}{2}} \textbf{0,2pts.} \\
&\overset{y'\geq b}{\Leftrightarrow} \quad y = \sqrt{\frac{y'-b}{2}} \textbf{0,6pts.}
\end{aligned}$$

Lo anterior prueba que $g$ es biyectiva con inversa $g^{-1}(y') = \sqrt{\frac{y'-b}{2}}$. **0.3 pts.**

**Comentarios para corrección**

Se podría realizar el cálculo de inversas y componer por ambos lados, en tal caso, asignar el puntaje correspondiente para $f$ para la composición que da la epiyectividad de $f$, es decir, $f \circ f^{-1} = id$ **0.4pts** y **0.3pts** por la otra composición. En el caso de $g$, asignar **0.4pts.** por cada composición.

2) (0.5pts.) Si $a \neq 0$, determine $h^{-1}$.

**Solución**

Notemos que $h^{-1} : \mathbb{R} \times [b, \infty) \to \mathbb{R} \times [0, \infty)$ está dada por $h^{-1} = (f^{-1}, g^{-1})$, entonces basta con determinar las inversas de $f$ y $g$. Esto fue realizado en el item anterior. Así

$$h^{-1}(x, y) = \left( \frac{x-5}{a}, \sqrt{\frac{y-b}{2}} \right)$$

**0.5 pts.**

**Comentarios para corrección**

Se podría realizar aquí nuevamente el cálculo de las inversas, en tal caso, asigne el puntaje correspondiente.