Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101 - Introducción al Álgebra. Otoño 2023.
lunes 10 de Abril

PAUTA CONTROL 1

P1. a) (3pts) Sean p, q, r y s proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$$

Solución primera forma: .

Razonamos por contradicción, es decir asumimos que

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Leftrightarrow V \text{ y que } [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \Leftrightarrow F.$$

Como la tesis está formada por una combinación de conjunciones y el total es Falso, cada uno de sus elementos debe serlo. Por ende se concluye que

$$\overline{p} \Leftrightarrow F, \overline{r} \Leftrightarrow F \text{ y } (q \wedge s) \Leftrightarrow F.$$

Por definición de negación se concluye directamente que

$$p \Leftrightarrow V \text{ y } r \Leftrightarrow V.$$

Por otro lado, la hipótesis es una disyunción de dos proposiciones que se está asumiendo verdadera, por ende necesariamente cada proposición debe serlo también. Así:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V \text{ y } (\overline{s} \Rightarrow \overline{r}) \Leftrightarrow V.$$

Si reemplazamos que $p \Leftrightarrow V$ en $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$, obtenemos que necesariamente

$$q \Leftrightarrow V$$

(pues sino sería $V \Rightarrow F$, lo que es equivalente a F). Usando el mismo argumento, si reemplazamos que $r \Leftrightarrow V$ en $(\overline{s} \Rightarrow \overline{r}) \Leftrightarrow V$ se deduce que $\overline{s} \Leftrightarrow F$, es decir

$$s \Leftrightarrow V.$$

Sin embargo, si reemplazamos esto en

$$(q \wedge s) \Leftrightarrow F, \text{ obtenemos que } V \wedge V \Leftrightarrow F,$$

lo que es una contradicción. Y por ende se concluye que la proposición es una tautología.

Puntajes forma 1

- Por explicitar el razonamiento que se está utilizando 0.3pts
- Por indicar que por razonar por contradicción la hipótesis debe ser verdadera y la tesis falsa 0.3pts
- Por argumentar que para que una conjunción sea falsa cada parte debe serlo 0.3pts
- Por argumentar que para que una disyunción sea verdadera cada parte debe serlo 0.3pts
- Argumentar por qué p es verdadera 0.2pts
- Explicitar que p es verdadera 0.2pts
- Argumentar por qué r es verdadera 0.2pts
- Explicitar que r es verdadera 0.2pts
- Argumentar por qué q es verdadera 0.2pts
- Explicitar que q es verdadera 0.2pts
- Argumentar por qué q es verdadera 0.2pts
- Explicitar que q es verdadera 0.2pts
- Por encontrar la contradicción y concluir que la proposición es una tautología 0.2pts

Es muy importante que cada paso esté argumentado y no que solo sean los pasos correctos. Si no está la argumentación explícita se debe descontar en cada paso lo indicado previamente.

Si se razona de forma exploratoria, se asume que la hipótesis debe ser verdadera, se argumenta que por ser una disyunción cada proposición debe ser verdadera. Eso entrega cuatro casos casos 1) que p y $\overline{s}$ verdaderos, 2)que p sea verdadero, y $\overline{s}$ sea falso, 3)que p sea falso y $\overline{s}$ verdadero, 4)que p y $\overline{s}$ falsos. Luego, hay que estudiar cada implicancia para concluir que en cada caso la tesis también es verdadera. En ese caso el puntaje se divide en:

- Por explicitar el razonamiento que se está utilizando 0.3pts
- Por indicar que por razonar de manera exploratoria la hipótesis debe ser verdadera 0.3pts
- Reconocer cada caso, y hacer todas las argumentaciones necesarias para llegar a que la tesis también es verdadera 0.5pts por caso
- Concluir que como se cumple en todos los casos entonces la proposición es tautología 0.4pts

También se podría hacer de forma exploratoria asumiendo la tesis falsa, y llegar a que la hipótesis es verdadera, lo cuál también requiere estudiar casos. En esa situación se mantiene la repartición pero los 2 puntos centrales se dividen entre los 5 o 6 casos según el razonamiento.

Solución segunda forma: .

Razonamos de manera simbólica

$$
\begin{array}{rcc}
 & & [(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})] \Rightarrow [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(Caract. implica)} & \Leftrightarrow & \overline{[(p \Rightarrow q) \wedge (\overline{s} \Rightarrow \overline{r})]} \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(Caract. implica)} & \Leftrightarrow & [\overline{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{\overline{s}} \vee \overline{r})}] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(De Morgan)} & \Leftrightarrow & [\overline{(\overline{p} \vee q)} \vee \overline{(\overline{\overline{s}} \vee \overline{r})}] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(De Morgan)} & \Leftrightarrow & [(\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{\overline{\overline{s}}} \wedge \overline{\overline{r}})] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(Doble negación)} & \Leftrightarrow & [(p \wedge \overline{q}) \wedge (\overline{s} \wedge r)] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(Asociatividad)} & \Leftrightarrow & [p \wedge (\overline{q} \wedge \overline{s}) \wedge r] \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)] \\
\text{(Distributividad)} & \Leftrightarrow & (p \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]) \wedge ((\overline{q} \wedge \overline{s}) \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]) \wedge \\
 & & (r \vee [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]) \\
\text{(Asociatividad)} & \Leftrightarrow & (p \vee \overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)) \wedge ((\overline{q} \wedge \overline{s}) \vee \overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)) \wedge \\
 & & (r \vee \overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)) \\
\text{(Tercero exclusivo)} & \Leftrightarrow & (V \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)) \wedge (V \vee \overline{p} \vee \overline{r}) \wedge (V \vee \overline{p} \vee (q \wedge s)) \\
\text{(Dominancia)} & \Leftrightarrow & V \wedge V \wedge V \\
 & \Leftrightarrow & V
\end{array}
$$

Puntajes

- Si un razonamiento está completamente correcto y argumentado 3pts
- Si un razonamiento no está completamente correcto desmembrar según el nivel de avance, tener presente que la cantidad de pasos depende de la estrategia aplicada:
    - Realiza al menos 1 tercio (aprox 3) de los pasos en la dirección correcta 1 pts
    - Realiza al menos 2 tercios (aprox 6) de los pasos en la dirección correcta 2 pts
    - Realiza al menos 3 tercios (aprox 10) de los pasos en la dirección correcta 3 pts
- El error de arrastre no anula necesariamente todos los pasos que vienen a continuación, siempre y cuándo siga avanzando en la dirección correcta.
- Independiente de si un razonamiento está completamente correcto o no, cada vez que no menciona las propiedades aplicadas -0.1. Puede no poner el nombre, pero debe explicitar qué está usando.

b) (3pts) Demostrar usando inducción que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n$ es divisible por 5.

Solución: .

Razonamos por inducción:

- Caso base: tomamos n=0, al reemplazar en la proposición queda $2 \cdot 4^0 + 3 \cdot 9^0 = 2 + 3 = 5 = 5 \cdot 1$. Por ende, se cumple lo pedido.

- Hipótesis inductiva: asumimos que se cumple para n, es decir que existe un k entero, tal que: $2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n = 5k$.

- Paso inductivo: veamos que se cumple para $n + 1$, es decir que existe un k' entero, tal que: $2 \cdot 4^{n+1} + 3 \cdot 9^{n+1} = 5k'$.
  En efecto:
  $$\begin{aligned} & 2 \cdot 4^{n+1} + 3 \cdot 9^{n+1} \\ = & \ 4 \cdot 2 \cdot 4^n + 27 \cdot 9^n \\ = & \ 4 \cdot (2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n - 3 \cdot 9^n) + 27 \cdot 9^n \\ = & \ 4 \cdot (\overbrace{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n}^{HI}) - 12 \cdot 9^n + 27 \cdot 9^n \\ = & \ 4 \cdot 5k - 15 \cdot 9^n \\ = & \ 5(4k - 3 \cdot 9^n) \end{aligned}$$
  Luego, tomando $k' = 4k - 3 \cdot 9^n$, el cuál es entero por ser una resta de enteros, se cumple lo pedido, y por inducción se concluye que la proposción es verdadera.

Puntajes

- Caso base 0.4pts. Si no explicita el $5 = 5 \cdot 1$ dar solo 0.2
- Hipótesis inductiva 0.4pts. En alguna parte del desarrollo debe estar explícito lo que significa ser divisible por 5, es decir la frase "existe entero tal que $2 \cdot 4^n + 3 \cdot 9^n = 5k$.". Si nunca lo escribe descontar 0.2
- Por enunciar correctamente el paso inductivo dar 0.3pts
- Por sumar un cero conveniente 0.5pts
- Por el desarrollo del paso inductivo 0.5pts
- Por nombran explícitamente cuándo utiliza la hipótesis 0.5pts
- Por indicar explícitamente cuál es el k' que se está tomando 0.2pts
- Por concluir 0.2pts

Un problema que puede ocurrir es que $2 \cdot 4^{n+1}$ lo escriba como $8 \cdot 4^n$, con eso se tiende a llegar a

$$8 \cdot 5k - 8 \cdot 4^n - 3 \cdot 9^n.$$

En ese caso, lo que corresponde es demostrar por inducción que $8 \cdot 4^n - 3 \cdot 9^n$ es divisible por 5. Si llega a ese punto, explicitando lo que debería hacer, descontar los 0.5 del cero conveniente, 0.2 del k' y 0.2 de concluir. Luego esos 0.9 se asignan a esa segunda inducción con 0.2 paso inductivo, 0.2 hipótesis y 0.5 paso inductivo.

P2. a) (3pts) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justifique sus respuestas:

I) (1.5pts) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ [x < y \ \Rightarrow \ (\exists z \in \mathbb{R})\ x < z < y]$

II) (1.5pts) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\forall y \in \mathbb{N})\ [x < y \ \Rightarrow \ (\exists z \in \mathbb{N})\ x < z < y]$

Obs: *Para alguna de las dos proposiciones le puede ser útil recordar (no es necesario demostrarlo) que* $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$.

Solución: .

La primera proposción se lee como que dados dos reales cualesquiera, siempre es posible encontrar un tercero que esté entre ambos. Esto es verdadero, pues basta tomar $z = \frac{x+y}{2}$, y con eso se cumple la implicancia. En efecto, si

$$x < y \Rightarrow x + x < y + x \Rightarrow \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} \Rightarrow x < z.$$

Por otro lado,

$$x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} \Rightarrow z < y.$$

De esta manera, tenemos que $(x < y \Rightarrow x < z) \wedge (x < y \Rightarrow z < y)$, utilizando la observación del enunciado, entonces podemos concluir que $x < y \Rightarrow x < z < y$.

Por otro lado, la segunda proposición se lee como que dados dos naturales cualesquiera, siempre es posible encontrar un tercero que esté entre ambos. Esto es falso, pues si tomamos, por ejemplo, $x = 1, y = 2$, se tiene que no hay ningún z entre medio. Es decir, se cumple que $x < y$, pero no que $(\exists z \in \mathbb{N})\ x < z < y$, lo que hace que la implicancia sea falsa.

Puntajes

Para el primero:

- Explicitar que la primera es verdadera 0.3pts
- Encontrar un z conveniente 0.4pts
- Demostrar que $x < y \Rightarrow x < z$ 0.3pts
- Demostrar que $x < y \Rightarrow z < y$ 0.3pts
- Concluir usando la indicación 0.2pts

En el caso de que no se responda correctamente la pregunta, pero se explicite la interpretación de la frase correctamente dar 0.5pts. Por otro lado si no se demuestra rigurósamente que $x < y \Rightarrow x < z$ y $x < y \Rightarrow z < y$, sino que solo se dice algo similar a "si un número es mayor que otro, su promedio siempre estará entre los dos", descontar los 0.6 de esas demostraciones y el 0.2 de la conclusión, y dar 0.4. Pero para tener esos 0.4 debe haber algúna fundamentación explícita.

Para el segundo:

- Explicitar que es falsa 0.3pts
- Encontrar un x, y conveniente 0.8pts
- Explicitar por qué ese x, y sirven 0.4 pts

En el caso de que no se responda correctamente la pregunta, pero se explicite la interpretación de la frase correctamente dar 0.5pts.

b) (3pts) Sean $A, B, C \subseteq E$ conjuntos (E indica conjunto de referencia). Demostrar que

$$A \cap [C \cup (B \setminus (A \setminus C))] = A \cap C.$$

Solución forma 1: .

$$\begin{array}{rcc}
 & & A \cap [C \cup (B \setminus (A \setminus C))] \\
\text{(caract. diferencia)} & = & A \cap [C \cup (B \setminus (A \cap C^c))] \\
\text{(caract. diferencia)} & = & A \cap [C \cup (B \cap (A \cap C^c)^c)] \\
\text{(De Morgan)} & = & A \cap [C \cup (B \cap (A^c \cup (C^c)^c)] \\
\text{(doble comeplemento)} & = & A \cap [C \cup (B \cap (A^c \cup C)] \\
\text{(Distribución)} & = & A \cap [C \cup ((B \cap A^c) \cup (B \cap C))] \\
\text{(Distribución)} & = & (A \cap C) \cup (A \cap (B \cap A^c)) \cup (A \cap (B \cap C)) \\
\text{(Asocitatividad)} & = & (A \cap C) \cup (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C) \\
(\text{Conmutatividad} + A \cap A^c = \emptyset) & = & (A \cap C) \cup (B \cap \emptyset) \cup (A \cap B \cap C) \\
(A \cup \emptyset = A) & = & (A \cap C) \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C) \\
\text{(explicación)} & = & (A \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \\
 & = & (A \cap C)
\end{array}$$

Donde explicación corresponde a que como

$$A \cap B \cap C \subseteq A \cap C \text{ entonces } (A \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = (A \cap C).$$

Puntajes

- Si un razonamiento está completamente correcto y argumentado 3pts
- Si un razonamiento no está completamente correcto desmembrar según el nivel de avance, tener presente que la cantidad de pasos depende de la estrategia aplicada:
  - Realiza al menos 1 tercio (aprox 4) de los pasos en la dirección correcta 1 pts
  - Realiza al menos 2 tercios (aprox 8) de los pasos en la dirección correcta 2 pts
  - Realiza al menos 3 tercios (aprox 12) de los pasos en la dirección correcta 3 pts
- El error de arrastre no anula necesariamente todos los pasos que vienen a continuación, siempre y cuándo siga avanzando en la dirección correcta.
- Independiente de si un razonamiento está completamente correcto o no, cada vez que no menciona las propiedades aplicadas -0.1. Puede no poner el nombre, pero debe explicitar qué está usando.

Solución forma 2: .

Para demostrar una igualdad de conjuntos es necesario demostrar dos contenciones. En primer lugar notemos que

$$A \cap [C \cup (B \setminus (A \setminus C))] = (A \cap C) \cup (A \cap (B \setminus (A \setminus C))$$

Recordemos que para cualquier par de conjuntos H, G se tiene que $H \subseteq H \cup G$, podemos aplicar lo anterior con $H = A \cap C$, y $G = (A \cap (B \setminus (A \setminus C))$, con lo que concluimos que $A \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (A \cap (B \setminus (A \setminus C))$.

Luego, solo necesitamos verificar que además $(A \cap C) \cup (A \cap (B \setminus (A \setminus C)) \subseteq A \cap C$. En efecto, sea $x \in (A \cap C) \cup (A \cap (B \setminus (A \setminus C))$. Eso da dos casos, el primero es que $x \in (A \cap C)$ lo que termina la demostración. En el segundo caso, $x \in (A \cap (B \setminus (A \setminus C))$. Es decir $x \in A \wedge x \in (B \setminus (A \setminus C))$, por ende, $x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin (A \setminus C)$, lo que equivale a que $x \in A \wedge x \in B \wedge \overline{x \in A \wedge x \notin C}$. Que aplicando De Morgan quedaría como $x \in A \wedge x \in B \wedge (x \notin A) \vee x \in C)$. Distribuyendo, $(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A)) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)$. Como el primer paréntesis es falso, pues no puede cumplirse $x \in A \wedge x \notin A$, la expresión se reduce a $x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$, la cual implica que $x \in A \wedge x \in C$, que era lo que se buscaba.

De esta manera se concluye que $(A \cap C) \cup (A \cap (B \setminus (A \setminus C)) \subseteq A \cap C$., lo que junto a la otra inclusión ya demostrada permite dar por finalizada la demostración.

Puntajes

- Separar en doble inclusión 0.5pts
- Argumentar la primera inclusión 1 pts
- Argumentar el caso trivial de la segunda inclusión 0.5pts
- Argumentar el caso complejo de la segunda inclusión 1pts