



Control 1

P1. a) Sean p, q, r tres proposiciones lógicas. Considere la proposición lógica s dada por

$$(p \implies q) \implies [(q \implies r) \implies (p \implies r)].$$

i) (1.5 pts) Demuestre que la negación de s es

$$(p \implies q) \wedge (q \implies r) \wedge p \wedge \bar{r}.$$

Solución:

Sabemos que si a y b son dos proposiciones lógicas, se tiene que $\neg(a \implies b) \iff a \wedge \bar{b}$ **(0.3 pts.)** Usando esta propiedad obtenemos que la negación de s es equivalente a

$$(p \implies q) \wedge \neg[(q \implies r) \implies (p \implies r)].$$

(0.4 pts.)

Usando nuevamente la negación de una implicancia, obtenemos que $\bar{s}$ es equivalente a

$$(p \implies q) \wedge (q \implies r) \wedge \neg(p \implies r).$$

(0.4 pts.)

Reemplazando la negación de la última implicancia, obtenemos finalmente que $\bar{s}$ es equivalente a

$$(p \implies q) \wedge (q \implies r) \wedge p \wedge \bar{r}.$$

que es lo que deseábamos mostrar **(0.4 pts.)**

ii) (1.5 pts) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que s es tautología.

Solución:

Primera forma. Podemos usar la parte anterior y demostrar que $\bar{s}$ es una contradicción **(0.3 pts.)**

Supongamos que $\bar{s}$ es V . Luego, las proposiciones $(p \implies q)$, $(q \implies r)$, p , y $\bar{r}$ son todas V **(0.3 pts.)** De esto deducimos inmediatamente que r es F y que p es V **(0.2 pts.)** Pero como $p \implies q$ es V , deducimos que q es V . Similarmente, como $q \implies r$ es V , obtenemos que r es V **(0.3 pts.)**. Esto contradice que r es F . Es decir $\bar{s}$ debe ser F , con lo cual s es V . **(0.4 pts.)**

Segunda forma. Usando el álgebra booleana. Reescribamos las implicancias usando la negación y el o lógico. Para facilitar la escritura, comencemos desarrollando la expresión $(q \implies r) \implies$

$(p \implies r)$. Tenemos que:

	$[(q \implies r) \implies (p \implies r)]$	
$\iff$	$\overline{(\bar{q} \vee r)} \vee (\bar{p} \vee r)$	def implica
$\iff$	$(q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \vee r)$	ley de De Morgan
$\iff$	$(q \vee \bar{p} \vee r) \wedge (\bar{r} \vee \bar{p} \vee r)$	distributividad
$\iff$	$(q \vee \bar{p} \vee r) \wedge (\bar{r} \vee r \vee \bar{p})$	conmutatividad de $\vee$
$\iff$	$(q \vee \bar{p} \vee r) \wedge (V \vee \bar{p})$	$\bar{r} \vee r \iff V$
$\iff$	$(q \vee \bar{p} \vee r) \wedge V$	V es dominante para $\vee$
$\iff$	$(q \vee \bar{p} \vee r)$	V es neutro para $\wedge$

(0.7 pts.)

Reemplazando lo recién obtenido en s , obtenemos que

	$(p \implies q) \implies [(q \implies r) \implies (p \implies r)]$	
$\iff$	$\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee (q \vee \bar{p} \vee r)$	def de implicancia
$\iff$	$(p \wedge \bar{q}) \vee (q \vee \bar{p} \vee r)$	ley de De Morgan
$\iff$	$(p \vee q \vee \bar{p} \vee r) \wedge (\bar{q} \vee q \vee \bar{p} \vee r)$	distributividad
$\iff$	$(p \vee \bar{p} \vee q \vee r) \wedge (\bar{q} \vee q \vee \bar{p} \vee r)$	conmutatividad de $\vee$
$\iff$	$(V \vee q \vee r) \wedge (V \vee \bar{p} \vee r)$	$p \vee \bar{p} \iff V, q \vee \bar{q} \iff V$
$\iff$	$V \wedge V$	V es dominante para $\wedge$
$\iff$	V	

(0.8 pts.)

Tercera forma. Exploratoria. Para demostrar que la implicancia es una tautología, basta analizar el caso cuando $p \implies q$ es V y demostrar que $(q \implies r) \implies (p \implies r)$ también lo es (0.5 pts.). Del mismo modo, para esta última, basta considerar el caso cuando $q \implies r$ es V y mostrar que $p \implies r$ también lo es (0.3 pts.). Dado que por transitividad tenemos que $(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$ (0.3 pts.), se sigue que $p \implies r$ es V (0.4 pts.)

b) Para x y y números enteros, sea $P(x, y)$ la función proposicional

$$(x \leq y) \implies (x^2 \leq y^2).$$

i) (1.5 pts) Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{Z} \mid P(x, 1) \text{ es } V\}$.

Solución: Notar que para $x \in \mathbb{Z}$, la proposición $P(x, 1)$ corresponde a

$$(x \leq 1) \implies (x^2 \leq 1).$$

(0.3 pts.)

Primero notemos que si $x > 1$, entonces $P(x, 1)$ es automáticamente V , al ser una implicancia con una hipótesis F (0.4 pts.). Dentro de los enteros que satisfacen $x \leq 1$, la condición $x^2 \leq 1$ es V solo para $x = 1$, $x = 0$ y $x = -1$. Esto pues todos los enteros x menores o iguales que -2 tienen un cuadrado estrictamente mayor a 1, con lo cual la proposición $(x \leq 1) \implies (x^2 \leq 1)$ equivale a

$V \implies F$, que es F **(0.5 ptos.)**. Así, el conjunto buscado es $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -1\} = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ **(0.3 ptos.)**.

ii) (1.5 ptos) Determine el valor de verdad de

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, P(x, y).$$

Para ver que el valor de verdad es F , basta exhibir un par de números enteros para los cuales no se cumpla la implicancia (contraejemplo) **(0.7 ptos.)**. Para $x = -2$ e $y = 1$, se tiene que $x \leq 1$, pero $x^2 > 1$, por lo que $P(-2, 1) \iff F$. **(0.8 ptos.)**

P2. a) (3.0 ptos) Sea x_n la secuencia definida por la recurrencia $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ y $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ para $n \geq 2$. Demuestre que $x_n = 1 + 2^n$ para todo $n \geq 0$.

Solución:

Haremos la demostración por inducción en la variable n . La propiedad que debemos probar que se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$ es: $p(n) \iff x_n = 1 + 2^n$. Notando que en la recurrencia el término x_n no solamente depende de el término anterior (x_{n-1}) sino también del previo a aquel (x_{n-2}), nuestra hipótesis de inducción corresponderá a la de la inducción fuerte ($p(0) \wedge p(1) \wedge \dots \wedge p(n-1)$), y además el caso $p(0) \implies p(1)$ del paso inductivo tampoco podrá realizarse usando la fórmula de la recurrencia, por lo cual en el caso base revisaremos ambos, $p(0)$ y $p(1)$.

Caso base: (1.0 pto.)

Como dijimos, verificaremos $p(0)$ y $p(1)$.

$p(0) \iff x_0 = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$, lo que es verdadero por el enunciado.

Análogamente $p(1) \iff x_1 = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$, también verdadero por el enunciado.

Paso inductivo: (2.0 ptos.)

Sólo nos queda ver que para todo $n \geq 2$, $p(0) \wedge p(1) \wedge \dots \wedge p(n-1) \implies p(n)$. Es decir, tratemos de demostrar el caso n usando los anteriores como hipótesis inductiva. A partir de la recurrencia, tenemos que $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$. Pero, por hipótesis de inducción, $x_{n-1} = 1 + 2^{n-1}$ (caso $p(n-1)$) y $x_{n-2} = 1 + 2^{n-2}$ (caso $p(n-2)$). Reemplazando entonces en la fórmula para x_n y efectuando algo de operatoria elemental, tenemos $x_n = 3 \cdot (1 + 2^{n-1}) - 2 \cdot (1 + 2^{n-2}) = 3 - 2 + 3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-2} = 1 + 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} = 1 + 2 \cdot 2^{n-1} = 1 + 2^n$, lo que concluye el paso inductivo.

b) (3.0 ptos) Sea E un conjunto de referencia y $A, B \subseteq E$. Pruebe que

$$B \setminus A = E \iff B = E \wedge A = \emptyset.$$

Solución:

Separaremos la equivalencia que se pide demostrar en dos implicaciones:

Si $B \setminus A = E$, entonces $B = E \wedge A = \emptyset$:

(1.0 pto.) Veamos primero que B debe ser igual a E .

Como E es el conjunto de referencia, entonces claramente $B \subseteq E$, por tanto solo debemos probar es que $E \subseteq B$. Por contradicción, si este no fuese el caso, habría un elemento $x_0 \in E$ que no es elemento de B . Entonces x_0 tampoco sería elemento de $B \setminus A$ (recordemos que los elementos de $B \setminus A$ **son elementos de B** que no pertenecen a A). Y como, por hipótesis $B \setminus A = E$, entonces $x_0 \notin E$, lo que es una contradicción, y por lo tanto hemos demostrado lo que queríamos.

(1.0 pto.) Veamos ahora que A debe ser vacío.

Primera forma: Como ya sabemos que $B = E$, entonces la hipótesis se escribe $E \setminus A = E$, es decir $A^c = E$. Aplicando el complemento en ambos lados resulta $(A^c)^c = E^c$, lo que es $A = \emptyset$.

Segunda forma: Podemos también razonar por contradicción. Si suponemos que $A \neq \emptyset$, entonces A tendrá al menos un elemento x_0 (que también debe ser elemento de la referencia E). Por definición de diferencia, $x_0 \notin B \setminus A$. Pero como por hipótesis $B \setminus A = E$, entonces $x_0 \notin E$, lo que es una contradicción. Por lo tanto A debe ser $\emptyset$.

Si $B = E \wedge A = \emptyset$, entonces $B \setminus A = E$:

(1.0 pto.) Esta demostración se reduce al cálculo siguiente: $B \setminus A = E \setminus \emptyset = \emptyset^c = E$.

Solución alternativa de la parte b) (3 ptos.)

Usaremos acá solamente las definiciones de igualdad de conjuntos, diferencia de conjuntos, conjunto vacío, el hecho de que la referencia E es el conjunto tal que $x \in E$ es siempre verdadero, y la siguiente propiedad de cuantificadores: $(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)) \iff (\forall x \in E, p(x)) \wedge (\forall x \in E, q(x))$.

$$\begin{array}{ll}
 & B \setminus A = E \\
 \iff & \forall x \in E, (x \in B \setminus A \iff x \in E) \\
 \iff & \forall x \in E, (x \in B \wedge x \notin A \iff \mathbf{V}) \\
 \iff & \forall x \in E, (x \in B \wedge x \notin A) \\
 \iff & (\forall x \in E, x \in B) \wedge (\forall x \in E, x \notin A) \\
 \iff & B = E \wedge A = \emptyset
 \end{array}$$

Duración: 1 hora y 15 minutos.