



Pauta Control 1

- P1.** a) (3 pts.) Sean p, q, r proposiciones arbitrarias. Demostrar sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \wedge r) \Rightarrow (p \wedge r)]. \quad (1)$$

Solución: Para trabajar con esta implicancia comenzaremos usando la conocida tautología: $a \Rightarrow b \Leftrightarrow \overline{a} \vee b$, para a, b proposiciones (caracterización de la implicancia). Luego esto en (1) nos conduce a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \vee [(\overline{q \wedge r}) \vee (\overline{p \wedge r})] && \leftarrow \text{caracterización de la implicancia} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee [(q \wedge r) \vee (\overline{p} \vee \overline{r})] && \leftarrow \text{morgan y doble negación} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee [\overline{r} \vee (q \wedge r)] \vee \overline{p} && \leftarrow \text{asociando y conmutando} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee [(\overline{r} \vee q) \wedge (\overline{r} \vee r)] \vee \overline{p} && \leftarrow \text{distribuyendo} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee [(\overline{r} \vee q) \wedge V] \vee \overline{p} && \leftarrow \text{3er excluido o tercio exclusivo} \\ &\Leftrightarrow \overline{p} \vee (p \wedge \overline{q}) \vee q \vee \overline{r} && \leftarrow \text{identidad (o reducción) y conmutando} \\ &\Leftrightarrow [(\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})] \vee q \vee \overline{r} && \leftarrow \text{distribuyendo} \\ &\Leftrightarrow [V \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})] \vee q \vee \overline{r} && \leftarrow \text{3er excluido o tercio exclusivo} \\ &\Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \vee q \vee \overline{r} && \leftarrow \text{identidad (o reducción)} \\ &\Leftrightarrow \overline{p} \vee V \vee \overline{r} && \leftarrow \text{3er excluido o tercio exclusivo} \\ &\Leftrightarrow V && \leftarrow \text{dominancia (o reducción).} \end{aligned}$$

Obs: Es probable que para negación algún estudiante use $\sim$, tener en cuenta ello.

Distribución de puntajes:

- Asignar (0, 4 pts.) por el 1er paso al aplicar la caracterización de la implicancia.
- (0, 2 pts.) por cada paso con un sólo argumento y (0, 4 pts.) por lo que usan dos propiedades, esto es el 2do, 3ero y el 6to.
- Esta es una forma de obtener el resultado, por ende se debe designar a criterio puntaje haciendo un símil siguiendo la distribución propuesta para la corrección.

- b) Sea E un conjunto de referencia con $E \neq \emptyset$, para $A \subseteq E$ considere la familia

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{P}(E) : A \cap B = \emptyset\}.$$

Demostrar que

- 1) (0.3 pts.) $\emptyset \in \mathcal{M}_A$ y $A^c \in \mathcal{M}_A$.

Solución: Se sabe que $\emptyset \subset E$ y $A^c \subseteq E$ pues $A \subseteq E$. Ahora se tiene que $A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \cap A^c = \emptyset$, luego $\emptyset$ y $A^c \in \mathcal{M}_A$ ambos.

Distribución de puntajes:

- Por la verificación pedida (0, 3 pts.).

2) (1.2 pts.) Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

- i) $A \in \mathcal{M}_A$
- ii) $A = \emptyset$,
- iii) $\mathcal{M}_A = \mathcal{P}(E)$

Además, indique para cuales $A \in \mathcal{P}(E)$ se tiene $\mathcal{M}_A = \{\emptyset\}$, Justifique su respuesta.

Solución: Hay al menos 2 formas de respuesta, una de ellas es ver las equivalencias i) $\Leftrightarrow$ ii) , ii) $\Leftrightarrow$ iii), el circuito se cierra por transitividad de la equivalencia (también puede ser i) $\Leftrightarrow$ iii) y ii) $\Leftrightarrow$ i)). Veamos el primer caso, si $A \in \mathcal{M}_A \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E) \wedge A \cap A = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$, lo cual prueba i) $\Leftrightarrow$ ii). Ahora si $A = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{P}(E) : \emptyset \cap B = \emptyset\} \Leftrightarrow \mathcal{M}_A = \mathcal{P}(E)$ luego se sigue la equivalencia ii) $\Leftrightarrow$ iii), se concluye por transitividad. La otra forma es demostrar i) $\Rightarrow$ ii) $\wedge$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\wedge$ iii) $\Rightarrow$ i). Argumentando nuevamente por transitividad que se cierra el circuito. Finalmente para $A = E$ se tiene que el único subconjunto B de E tal que $E \cap B = \emptyset$ es $\emptyset$, luego $\mathcal{M}_A = \{\emptyset\}$ en tal caso.

Distribución de puntajes:

- Asignar (0, 4 pts.) por cada equivalencia y (0, 2 pts.) por argumentar el cierre del circuito.
- En el segundo caso, asignar (0, 3 pts.) por cada implicancia (0, 1 pto.) por decir porque se cierra el circuito.
- Asignar (0, 2 pts.) por la pregunta final considerando el argumento.

3) (0.3 pts) $\forall B \in \mathcal{M}_A, \forall Y \in \mathcal{P}(E), B \cap Y \in \mathcal{M}_A$.

Solución: Sea $B \in \mathcal{M}_A$ y $Y \in \mathcal{P}(E)$ cualesquiera, se tiene $B \cap Y \subseteq E$ y $A \cap B \cap Y = \emptyset$ pues $A \cap B = \emptyset$ ya que $B \in \mathcal{M}_A$.

Distribución de puntajes:

- Asignar (0, 3 pts.) por el argumento completo.

4) (1.2 pts.) $(B \in \mathcal{M}_A) \wedge (C \in \mathcal{M}_A) \Rightarrow (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{M}_A$.

Solución: Supongamos que $B \in \mathcal{M}_A$ y $C \in \mathcal{M}_A$, veamos que $(B \setminus C) \cup (C \setminus B) \in \mathcal{M}_A$. En efecto, claramente $(B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ está en $\mathcal{P}(E)$ y

$$\begin{aligned} A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] &= (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) \quad \leftarrow \text{distribuyendo} \\ &= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \quad \leftarrow \text{usando } X \setminus Y = X \cap Y^c \\ &= (\emptyset \cap C^c) \cup (\emptyset \cap B^c) \quad \leftarrow \text{pues } B \in \mathcal{M}_A \text{ y } C \in \mathcal{M}_A \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- Asignar (0,1 pto.) por el primer argumento antes de calcular.
- Asignar (0,3 pts.) por cada igualdad de la 1era a la 3era y (0,2 pts.) por el paso final.

P2.- a) (3 pts.) Probar, usando el principio de inducción matemática, que todo número natural $n \geq 8$ puede escribirse en la forma:

$$n = 3p + 5q,$$

donde $p, q \in \mathbb{N}$.

Obs: $0 \in \mathbb{N}$.

Solución:

Caso base:

Si $n = 8$ basta tomar $p = q = 1$ tenemos $8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$

Hipótesis inductiva:

para todo $k \in \mathbb{N}$, $8 \leq k \leq n$ tenemos que existen $p, q \in \mathbb{N}$, $n = 3p + 5q$

Por demostrar: $n + 1 = 3p + 5q$, $p, q \in \mathbb{N}$ Escribiendo el 1 de forma conveniente, tenemos:

$$1 = 9 - 8, \quad 8 = 3 + 5 \text{ y } 9 = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5$$

$$n + 1 = n + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5 - 3 - 5 = 3p + 5q + 3 \cdot 3 - 3 - 5 \text{ es decir: } 3(p + 2) + 5(q - 1)$$

Si $q \geq 1$ hemos demostrado la proposición, ya que $(p + 2) \in \mathbb{N}$ y $(q - 1) \in \mathbb{N}$

si $q = 0$ debemos escribir el 1 de otra forma conveniente, por ejemplo $10 - 9 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3$

Luego $n + 1 = 3p + 5q + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 3(p - 3) + 5(q + 2)$ Cabe decir que como en este caso $q = 0$ el menor número con el que estamos trabajando para n es 9, lo que implica $q \geq 3$. y $(p - 3) \in \mathbb{N}$, $(q + 2) = 2 \in \mathbb{N}$.

Lo que termina la demostración.

Distribución de puntajes:

- (1 pto.) Por realizar el caso base.
- (0,5 pto.) Por plantear la hipótesis inductiva.
- (1 pto.) Por demostrar bien al menos uno de los dos casos (podría pasar que no se

den cuenta de que uno de los números p o q puede quedar negativo, lo que no implica necesariamente que no entiendan inducción.)

- (0, 5 pts.) Por demostrar el otro caso correctamente, dado que ya hicieron el primero, que puede ser cualquiera de los dos.

b) Dada una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, diremos que f cumple la propiedad P si:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \Rightarrow f(n) < f(n + m).$$

1) (1 pts.) Pruebe que toda función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que cumple la propiedad P es inyectiva.

Solución:

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrarios, supongamos $f(n) = f(m)$ si esto implica que $n = m$ la demostración está lista.

Supongamos que son diferentes, sin pérdida de generalidad $m > n$ luego $m = n + k, k \in \mathbb{N}$

Por hipótesis sabemos que $f(n) < f(n + k)$ lo que nos lleva a contradecir que eran iguales.

Por lo que f es inyectiva.

Distribución de puntajes:

- (1 pts.) Por demostrar correctamente la inyectividad, de esta forma o de forma directa.

2) (1 pts.) Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cumple la propiedad P , ¿es necesariamente epiyectiva?. Demuestre su respuesta en caso de ser afirmativa o exhiba un contraejemplo.

Solución:

f no es necesariamente epiyectiva, por ejemplo:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = n + 1 \text{ Cumple la propiedad } P \text{ Dado que } n + 1 < n + m + 1, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$\text{Y } \forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq 0.$$

Distribución de puntajes:

- (0, 5 pts.) Por encontrar un ejemplo no epiyectivo.
- (0, 5 pts.) Por mostrar que hay un número que no pertenece a la imagen de f (no hace falta que usen la palabra imagen, dado que no entraba en el control).

3) (1 pts.) Pruebe que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cumple la propiedad P y es epiyectiva, entonces $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$

Solución: Supongamos que $f \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$, entonces existe el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) \neq n$, demostraremos que entonces $f(n) > n + 1$ y que para todo $k \in \mathbb{N}, f(k) \neq n$

Sea $f(n) = m$ como $\forall k < n, f(k) = k$ tenemos en particular que $f(n) > f(n - 1) = n - 1$

$n - 1 < f(n) \neq n$ implica que $f(n) > n + 1$ además $\forall m > n$ por la propiedad

$$P, f(m) = f(n + k) > f(n)$$

Como $n \in \text{Cod}(f)$ y hemos demostrado que ningún $m \in \mathbb{N}$ cumple que $f(m) = n$
Luego f no es epiyectiva, o es la identidad.

Distribución de puntajes:

- (0, 2 pts.). Por suponer que hay un número en el que $f(n) \neq n$ que funcione para la contradicción.
- (0, 5 pts.). Por ver que entonces n no estará en la imagen (insisto, no entra en el control imagen y preimagen, con lo que lo explicarán con otras palabras, si usan la palabra imagen no castigar).
- (0, 3 pto.). Por concluir correctamente.
