



Examen de primera instancia

IMPORTANTE: Debe escoger y entregar sólo una de las preguntas P1 y P2. La pregunta P3 es obligatoria.

P1. 1. (2 puntos) Resuelva la ecuación

$$y' = \frac{2x + y}{3x - y}, \quad x > 0.$$

2. Sean a, b dos funciones continuas en un intervalo I . Considere la ecuación diferencial

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad \text{en } I, \quad (1)$$

a) (2 puntos) Encuentre una función p derivable y estrictamente positiva en I tal que (1) se puede escribir como

$$(py')' + bpy = 0,$$

b) (2 puntos) Suponga que $b(x)p^2(x) = A$, para cada $x \in I$ con A una constante. Demostrar que si y es una solución de la ecuación (1), entonces la función

$$E(x) = (py')^2 + Ay^2, \quad x \in I$$

es constante en I .

P2. Considere el sistema lineal de ecuaciones

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

1. (2 puntos) Encuentre la solución del sistema homogéneo asociado.
2. (2 puntos) Encuentre una solución particular del sistema.
3. (2 puntos) Verifique que la solución general tiende al vector nulo cuando t tiende a infinito.

P3. (Obligatoria) Para $0 < \alpha < 1/2$, considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = y(1 - 2x - y), \end{cases} \quad (2)$$

1. **(2 puntos)** Determine los puntos críticos (o de equilibrio) y la matriz Jacobiana o Diferencial del sistema asociada.
2. **(2 puntos)** Calcule los valores propios (en función de α) de la matriz Jacobiana o Diferencial en los puntos críticos (o de equilibrio). Además, indique el tipo y estabilidad de cada punto crítico.
3. **(2 puntos)** Encuentre los vectores propios asociados a la matriz Jacobiana o Diferencial evaluada en cada punto crítico (o de equilibrio) y esbozar los diagramas de fase para cada linealización considerando $\alpha = 1/4$.

NOTA:

- Esta es una evaluación individual, regida por el Reglamento General de Estudios de la Universidad de Chile y del Código de Ética de la FCFM.
- Sus soluciones deben ser entregadas en el sitio de reclamos DIM de acuerdo a los dos instructivos (1.- ingreso a página de reclamos y 2.- entrega de evaluaciones coordinadas) publicados en la página de docencia DIM, link web <https://docencia.dim.uchile.cl>. También se recomienda subir un respaldo de sus respuesta a la plataforma U-Cursos.