



Control Recuperativo 2

P1. a) (3 pts.) Calcule, sin usar inducción, la siguiente sumatoria

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (5^j + 8^{k-j}).$$

b) (1,5 pts.) Calcule el cardinal del conjunto A definido como los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que contienen a 1, es decir, calcule el cardinal de

$$A = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \mid 1 \in X\}.$$

c) (1,5 pts.) Sea $(G, *)$ un grupo y sea $y \in G$ fijo. Demuestre que la función $f: G \rightarrow G$ dada por $f(x) = y * x * y^{-1}$ es un homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

P2. a) Sea $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Se define la operación $\triangle$ en $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ mediante

$$(a, b) \triangle (c, d) = (ac, ad + b).$$

Se sabe (no lo demuestre) que $\triangle$ es asociativa.

- i) (1 pto.) Demuestre que la operación $\triangle$ tiene neutro y encuéntralo.
 - ii) (1 pto.) Dado $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, encuentre, de existir, su inverso para $\triangle$.
 - iii) (1 pto.) Determine si la operación $\triangle$ es conmutativa.
- b) Considere los complejos $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1 + i$.
- i) (1 pto.) Escriba el complejo $w = z_1/z_2$ en forma cartesiana.
 - ii) (1 pto.) Escriba el complejo $w = z_1/z_2$ en forma polar.
 - iii) (1 pto.) Concluya que $\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ y que $\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Duración: 1h 30'.