



Introducción al Álgebra MA1101

Control Recuperativo 3

P1. Se define $\mathcal{C} = \{S \subseteq \mathbb{N} : |S| < |\mathbb{N}|\}$, y se definen dos subconjuntos de $\mathcal{C}$: el conjunto $\mathcal{C}_1$ contiene a todos los $S \in \mathcal{C}$ con $|S|$ impar, y el conjunto $\mathcal{C}_2$ contiene a todos los $S \in \mathcal{C}$ con $|S|$ par. También se define $\mathcal{C}_0 = \{S \in \mathcal{C} : 0 \in S\}$.

- (a) (2 ptos) Muestre que $|\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_0| = |\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0|$.
- (b) (2 ptos) Muestre que $|\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0| = |\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_0|$.
- (c) (2 ptos.) También se tiene $|\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_0| = |\mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_0| = |\mathbb{N}|$ (no se pide probar esto). Usando estas igualdades y usando (i) e (ii), muestre que $|\mathcal{C}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Indicación:

(a) y (b): Notar que por ejemplo, $\{1, 4, 11\} \in \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{C}_0$, $\{0\} \cup \{1, 4, 11\} = \{0, 1, 4, 11\} \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_0$ y $\{0 + 1, 1 + 1, 4 + 1, 11 + 1\} = \{1, 2, 5, 12\} \in \mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_0$.

(c): Recordar que, para todo par de conjuntos A, B se tiene que $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$.

P2. Consideramos $(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5, +)$, el producto cartesiano de los grupos $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ y $(\mathbb{Z}_5, +_5)$.

- (a) Sea $f : \mathbb{Z}_{40} \rightarrow \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5$ dada por $f([x]_{40}) = ([x]_8, [x]_5)$. Muestre que f es un isomorfismo, es decir, muestre que
 - (i) (1 pto) f es un homomorfismo.
 - (ii) (3 ptos) f es biyectiva.
- (b) Considera el subgrupo $H = \{([i]_8, [0]_5) : i = 0, 2, 4, 6\}$.
 - (i) (1 pto) Determine $a + H$, la traslación a la izquierda de H por a , donde $a = ([3]_8, [3]_5)$.
 - (ii) (1 pto) Sea $\mathcal{T} = \{a + H : a \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5\}$. Determine $|\mathcal{T}|$.

P3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo.

- a) (2 ptos) Muestre que A es conmutativo si y solamente si

$$\text{para todo } a, b \in A \text{ se tiene que } (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot ab + b^2. \quad (1)$$

- b) (1 pto) Muestre que si A es conmutativo y tiene la propiedad que todo $a \in A$ es cancelable, entonces A es un dominio de integridad.

(Nota: Esto es consecuencia de una proposición del apunte, en el case que recuerde la demostración, la puede repetir.)

- c) (3 ptos) Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $f : A \rightarrow \mathbb{Z}_n$ un isomorfismo de anillos. Sea 1_A la unidad de A . Muestre que para cada elemento $a \in A$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = k \cdot 1_A$.

Indicación para a) y c): Recordar que para todo anillo $(X, +, \cdot)$, y todo $x \in X$ se definió lo siguiente: $1 \cdot x = x$ y $k \cdot x = x + (k - 1) \cdot x$ para $k \in \mathbb{N}^*$ (en particular $2 \cdot x = x + x$), y también $x^2 = x \cdot x$. Además, se puede usar la siguiente propiedad (sin necesidad de probarla): Si $g : B \rightarrow C$ es un homomorfismo de anillos y $b \in B$, se tiene que $f(j \cdot b) = j \cdot f(b)$.