



Control Recuperativo 2

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos; si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

P1. a) Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donde

$$f(x) = (x + 1)^2.$$

1) (1.5 pts.) Determine el conjunto imagen $f((-1, 0) \cup [1, 2])$.

2) (1.5 pts.) Determine la preimagen $f^{-1}([-1, 0])$.

b) Calcule las siguientes sumas:

1) (1 pt.) $\sum_{k=0}^n \frac{(k+1)!(1-k)}{k^2+k}.$

Sugerencia: Utilice la identidad $r \cdot r! = (r+1)! - r!$

2) (2 pts.) $\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{m+1} (5+2k)(2^{j-1}3^{j+1}).$

P2. a) Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \iff \frac{x+1}{y+1} \in \mathbb{N}.$$

1) (1.5 pts.) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

2) (0.5 pts.) Determinar si $\mathcal{R}$ es orden total.

b) En $\mathbb{Z}^2$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera:

$$(x, y)\mathcal{R}(u, v) \iff (x \equiv_3 u) \wedge (y \equiv_5 v).$$

1) (2 pts.) Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

2) (2 pts.) Determine las clases de equivalencia $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ y $[(1, 3)]_{\mathcal{R}}$, y exhiba al menos 3 elementos en cada clase.

P3. a) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definimos el conjunto

$$A_n = \left\{ \frac{2i+1}{2^n} \mid 0 \leq i < 2^{n-1} \right\}.$$

1) (2 pts.) Demostrar que $|A_3| = 4$, $|A_4| = 8$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar $|A_n|$.

2) (1 pt.) Determinar si A_n y A_m son disjuntos, para $n \neq m$.

3) (1 pt.) Para $m = 125$, sea $\mathcal{A}_m = \bigcup_{k=1}^m A_k$. Demuestre que $|\mathcal{A}_m| = 2^{125} - 1$.

b) (2 pts.) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j} = 2^{n-1}(2^n - 1).$$