



CONTROL RECUPERATIVO

P1. Se define $\mathcal{R}$ relación en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$\forall (n, m), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n, m) \mathcal{R} (p, q) \iff m - n = q - p.$$

- a) (3 pts.) Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- b) (1,5 pts.) Sea $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ la clase de $(0, 0)$, muestre que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}} = \{(p, p) : p \in \mathbb{N}\}$.
- c) (1,5 pts.) Pruebe que $[(0, 0)]_{\mathcal{R}}$ es un conjunto numerable.

P2. a) 1) (1 pto.) Probar, sin uso de inducción (es decir por cálculo directo) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 : \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}. \quad (1)$$

Ind: Recordar que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- 2) (1 pto.) Demuestre ahora (1) usando inducción.
- b) En $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \times \mathbb{Q}$ se define la l.c.i $*$ por $(p, q) * (r, s) = (p \cdot r, p \cdot s + q)$, donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales en $\mathbb{Q}$. Se sabe (no lo demuestre) que $*$ es asociativa en G .
 - 1) (0,5 pts.) Encontrar (n_1, n_2) neutro para $*$ en G .
 - 2) (1,5 pts.) Para cada $(p, q) \in G$ determine su inverso (p', q') para $*$. ¿Es (p', q') único?, explique.
 - 3) (0,5 pts.) Investigar si $*$ es conmutativa en G .
 - 4) (1,5 pts.) Para $b \in \mathbb{Q}$ fijo, se define la función $f : (G, *) \rightarrow (G, *)$ dada por $f(p, q) = (p, bq)$ para cada $(p, q) \in G$. Demuestre que f es un homomorfismo.

TIEMPO: 1 hora 30 minutos.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.