



CONTROL 6

P1. Sea $(G, \star)$ un grupo Abeliano. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos los subconjuntos

$$F_n := \{g \in G \mid g^n = e\},$$

donde e es el neutro del grupo G y $g^n = g \star g \star \cdots \star g$ (n veces).

a) (2 pts.) Demuestre que F_n es subgrupo de G , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Indicación: Note que se cumple la siguiente igualdad, e indique a qué propiedades de $\star$ se debe: $(x \star y)^n = x^n \star y^n$.

b) (2 pts.) Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 = kn_2 + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} = \{e\}.$$

c) (2 pts.) Si $G = \mathbb{Z}_4$ y la l.c.i. $\star$ corresponde a la suma $+_4$, calcule F_2 y F_3 .

P2. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, sin divisores de cero, de tres elementos distintos, $A = \{0, 1, x\}$, donde 0 es el neutro para la l.c.i. $+$ y 1 es el neutro para $\cdot$.

a) (3 pts.) Complete las tablas para las operaciones $+$ y $\cdot$, justificando adecuadamente cada valor.

$+$	0	1	x
0			
1			
x			

$\cdot$	0	1	x
0			
1			
x			

b) (3 pts.) Construya explícitamente un isomorfismo f entre $(A, +, \cdot)$ y alguna estructura $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$, con $p \in \mathbb{N}$ apropiado. Es decir, diga los valores $f(0)$, $f(1)$ y $f(x)$. Justifique que f cumple las propiedades pedidas.

TIEMPO: 1 hora 15 minutos.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.