



CONTROL 5

- P1.** a) (3 pts.) Muestre que el conjunto $A = \{q\sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\}$ es numerable.
b) (3 pts.) Probar que $B = \{\frac{n}{m}\sqrt{2} : n \text{ es un entero par y } m \text{ entero impar}\}$ es numerable.
- P2.** Considere el siguiente conjunto de funciones

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = ax + b. \text{ Con } a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}.$$

Considerando $(\mathcal{F}, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones, se pide

- a) (1,5 pts.) Probar que $\circ$ es l.c.i en $\mathcal{F}$, es decir si $f, g \in \mathcal{F}$ entonces $f \circ g \in \mathcal{F}$.
Obs: l.c.i significa ley de composición interna.
b) (1,5 pts.) Verifique que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ (función identidad en $\mathbb{R}$) es el neutro de $\mathcal{F}$ para $\circ$.
c) (1,5 pts.) Para cada $f \in \mathcal{F}$, determine su inverso f^{-1} para $\circ$. Verifique que $f^{-1} \in \mathcal{F}$.
d) (1,5 pts.) Considere la función

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathcal{F}, \circ) &\longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot) \\ f &\longmapsto \varphi(f),\end{aligned}$$

en donde $(\mathbb{R}, \cdot)$ es la multiplicación de reales y para $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) = ax + b$ entonces $\varphi(f) = a$.

Demuestre que para todo $f, g \in \mathcal{F}$ se tiene que $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$.

TIEMPO: 1 hora 15 minutos.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.