



Control 5

- P1.** a) Sea A el conjunto de los números reales que se pueden escribir como sumas de números enteros y múltiplos enteros de $\sqrt{2}$, es decir,

$$A = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

i) (3 pts.) Demuestre que $(A, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

ii) (1 pto.) Se define ahora $B = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. ¿Es $(B, +)$ un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$? Justifique.

b) (2 pts.) Sea P un conjunto numerable. Demuestre que $P \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es numerable.

- P2.** a) Sea $(H, \triangle)$ una estructura algebraica asociativa y con neutro $e \in H$. Sea H^* el conjunto de los elementos de H que tienen inverso para $\triangle$, es decir,

$$H^* = \{h \in H \mid \exists u \in H, (h \triangle u = e) \wedge (u \triangle h = e)\}.$$

Se sabe (no lo demuestre) que $(H^*, \triangle)$ es una estructura algebraica asociativa.

(2 pts.) Demuestre que $(H^*, \triangle)$ es un grupo.

b) Sea $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ la estructura algebraica definida por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Se sabe que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano con neutro $(0, 0)$ y tal que el inverso de $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es $-(a, b) = (-a, -b)$ (no lo demuestre).

Considere la función $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{30}$ dada por $f(a, b) = [6(a + b)]_{30}$.

i) (2 pts.) Demuestre que f es un homomorfismo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Z}_{30}, +_{30})$.

ii) (2 pts.) Sea $L = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(a, b) = [0]_{30}\}$. Demuestre que $(L, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Duración: 1h 30'.