Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1101 - Introducción al Álgebra. Otoño 2023.
27 de Mayo

CONTROL 4

P1. *a*) (i) (1.5 pts.) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \ldots, n\}$, se tiene que:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

(ii) (1.5 pts.) Utilice este resultado para calcular la suma:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

b) (3.0 pts.) Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[2^{k-1} \cdot \frac{1-k}{k(k+1)} \right].$$

Hint: Puede serle útil escribir la fracción como una resta de dos fracciones y hacer los ajustes necesarios para aplicar la propiedad telescópica.

P2. *a*) (3.0 pts.) Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un con junto con n elementos. Escriba en términos de n la cardinalidad del conjunto:

$$\bigcup_{i=1}^{n} [(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}]$$

Hint: Estudie que ocurre con $[(A \setminus \{a_i\}) \times \{a_i\}] \cap [(A \setminus \{a_j\}) \times \{a_j\}]$ cuando $i \neq j$.

b) (3.0 pts.) Sean $E = \{1, 2, \ldots, 12\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq E$. Determine la cardinalidad del conjunto formado por todos los subconjuntos de E con tres elementos, cuya intersección con A tiene exactamente un elemento. Es decir, calcule el cardinal del conjunto:

$$\{B \subseteq E : |B| = 3 \wedge |A \cap B| = 1\}.$$

TIEMPO: 1 hora 15 minutos.
Justifique adecuadamente cada paso.
No olvidar colocar nombre y RUT en cada una de sus hojas de respuestas.