

Control 4

P1. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) (3,0 pts.) Calcule (en función de n y sin usar inducción)

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}.$$

b) (3,0 pts.) Calcule (en función de n y sin usar inducción)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 5^k.$$

Indicación: Recuerde que $\frac{1}{j} \binom{m-1}{j-1} = \frac{1}{m} \binom{m}{j}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

P2. a) (2,0 pts) Sean $A, B, C \subseteq E$ conjuntos finitos. Pruebe que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

b) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de funciones de $\{1, \dots, 10\}$ en $\{1, 2\}$, es decir,

$$\mathcal{F} = \{f \mid f: \{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2\} \text{ es función}\}.$$

i) (2,0 pts.) Sea $j^* \in \{1, 2\}$ fijo. Se define el conjunto F_{j^*} de todas las funciones $f \in \mathcal{F}$ tales que $f(j^*) = j^*$, es decir,

$$F_{j^*} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(j^*) = j^*\}.$$

Pruebe que $|F_1| = |F_2| = 512$ y $|F_1 \cap F_2| = 256$.

ii) (2,0 pts) Muestre que hay 768 funciones $f \in \mathcal{F}$ tales que $f(1) = 1$ o $f(2) = 2$, es decir, pruebe que

$$|\{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 1 \vee f(2) = 2\}| = 768.$$

Duración: 1h 30'.