Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601, Semestre Verano.
Miércoles 22 de Enero 2025.

CONTROL 3

P1. *a*) (2 pts.) **Usando** que $\mathcal{L}[x^{-1/2}](s) = \sqrt{\pi/s}$ con $s > 0$, calcular $\mathcal{L}[x^{3/2}](s)$.

b) (1,5 pts.) Encontrar $x \mapsto f(x)$ continua y de orden exponencial tal que

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{s-7}{s^2 - 14s + 73}.$$

c) Sea $F(s) = \operatorname{arctg}(s)$, para $s > 0$.

1) (0,5 pts.) Muestre que F **no** es transformada de alguna función continua con orden exponencial.
2) (0,5 pts.) Modifique adecuadamente F para que **si** se cumpla la parte anterior, denote por G a dicha modificación.
3) (1,5 pts.) Determine f continua tal que $G(s) = \mathcal{L}[f(x)](s)$.

P2. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y'' + 2xy' - 4y = 1, \;\; x > 0. \\ &y(0) = 0, \; y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Use transformada de Laplace y sus propiedades para encontrar una solución.

P3. *a*) (4 pts.) Use transformada de Laplace, para resolver el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned} &y'' - 3y' + 2y = f(x), \\ &y(0) = y'(0) = 0, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x < 3 \\ 0 & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x < \infty \end{cases}$$

b) (2 pts.) Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y'' + y = \delta_\pi - \delta_{2\pi} \\ &y(0) = 0, \; y'(0) = 1. \end{aligned}$$

Bosqueje la solución obtenida.

TIEMPO: 3 hrs.
No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

• Tabla de Transformadas de Laplace y propiedades

Para la siguiente tabla de transformadas y propiedades elementales, suponemos $a \in \mathbb{R}$ y $\omega > 0$. Además denotamos para funciones f, g que admitan transformada $F(s) = \mathcal{L}[f(x)](s)$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(x)](s)$ respectivamente.

$f(x)$	$\mathcal{L}[f(x)](s)$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(\omega x)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\text{sen}(\omega x)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$x^k,\ k \in \mathbb{N}$	$\dfrac{k!}{s^{k+1}}$
$\delta_a(x)$	e^{-as}
$H_a(x)$	$e^{-as} \cdot \frac{1}{s}$

$f(x)$	$\mathcal{L}[f(x)](s)$
$f'(x)$	$sF(s) - f(0^+)$
$f''(x)$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$x^k f(x),\ k \in \mathbb{N}$	$(-1)^k \dfrac{d^k}{ds^k} F(s)$
$H_a(x) \cdot f(x-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$e^{ax} f(x)$	$F(s-a)$
$(f * g)(x)$	$F(s) \cdot G(s)$

• Recuerdos y cosas útiles

- $\mathcal{L}[f(x)] = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx.$
- $\mathcal{L}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathcal{L}[f(x)] + \beta\mathcal{L}[g(x)]$, para todo α, β reales.
- Si f es continua por tramos y de orden exponencial entonces $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f(x)](s) = 0.$
- $(f * g)(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)g(x-u)du$, es la convolución entre las funciones f y g.
- $H_a(x)$ es la función de Heaviside con salto en $x = a$, es decir $H_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}.$
- $\delta_a(x)$ es la delta o masa de dirac en $x = a$.
- Ademas le puede ser útil la relación

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2(s-2)}.$$