

# Control 3 MA2601 2024-2

Profesoras: Gabrielle Nornberg, Jessica Trespalcacios.

Miércoles, 13 de noviembre de 2024.

## Problema 1 (Mi conversación con el Chat GPT).

Le pedí al Chat GPT que me diera un ejemplo de una matriz con 1 autovalor real y 2 complejos, y además me mostrara la solución del sistema lineal homogéneo 3-dimensional asociado. A continuación se puede ver partes de (la traducción de) lo que me contestó.

Analice la respuesta dada por el Chat y desarrolle de la siguiente forma:

- en caso de que considere que la resolución es correcta, justifique cada paso;
- en caso contrario, muestre la resolución correcta e indique donde cometió el error la IA.

**Chat GPT:** "Considere el sistema  $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

### #### Resumen

La matriz  $A$  tiene un autovalor real, y 2 autovalores complejos conjugados.

Eso nos da un sistema lineal homogéneo  $3 \times 3$  con las propiedades de autovalores pedidas. Para resolver el sistema  $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$  resolveremos para cada autovalor y su vector propio correspondiente para encontrar la solución general.

#### Paso 1: Encuentre autovalores:  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2 + i$ ,  $\lambda_3 = 2 - i$ .

#### Paso 2: Encuentre vectores propios

1. \*\*Para  $\lambda_1 = 3$ :

Resuelva  $(A - 3I)\mathbf{v} = 0$ :  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$ . Tenemos  $v_1 = v_2$  y  $v_3$  libres. Sea  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

2. \*\*Para  $\lambda_2 = 2 + i$ :

Resuelva  $(A - (2 + i)I)\mathbf{v} = 0$ :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$ , encontrando  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

El vector propio para  $\lambda_3 = 2 - i$  será el complejo conjugado de  $\mathbf{v}_2$ , o sea,  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

#### Paso 3: Solución general

La solución general (compleja) del sistema es dada por:  $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{(2+i)t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{(2-i)t} \mathbf{v}_3$ . Expandingo las partes real e imaginaria, encontramos la solución general real del sistema dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} c_2 \sin(t) - c_3 \cos(t) \\ c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}."$$

**Problema 2** (Análisis cualitativo y cambio de coordenadas). Considere  $\alpha > 0$  y el sistema

$$Y' = AY, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encuentre los valores propios de la matriz  $A$  en términos de  $\alpha$ .
- (b) Si  $\alpha = 1/4$ , haga un dibujo de las soluciones respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Si  $\alpha = 4$ , haga un dibujo de las soluciones respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ .
- (d) En (b) y (c), las soluciones del sistema exhiben dos tipos diferentes de comportamiento. Determine el valor de  $\alpha$  entre  $1/4$  y  $4$  donde ocurre la transición de un tipo de comportamiento al otro. Además, dibuje las soluciones relativo a la base canónica en ese caso.
- (e) Calcule  $e^{At}$  en términos de  $\alpha$  y aplique para resolver el sistema dado. Además, escriba en una línea la relación de tal solución con las soluciones dibujadas en los ítemes anteriores.

**Problema 3** (PVI no homogéneo). Un sistema gobernado por una entrada de control  $u(t)$  se describe mediante la siguiente representación en el espacio de estados:

$$Y' = AY + u(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si  $u(t) = e^t$ , e  $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , encuentre la única solución  $Y$  del problema.

Formulario:

- Integración por partes:  $\int u dv = uv - \int v du$ .
- Una matriz  $A$  es diagonalizable si existe una matriz diagonal  $D$  tal que  $A = PDP^{-1}$ .
- Series de Taylor de la exponencial, seno y coseno:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \text{cos } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

*¡Que les vaya bien!*