Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-1, Coordinado.
Miércoles 11 de junio 2025.
Profesores: Sa. Martínez, F. Ortega, A. Osses

CONTROL 3

P1. (a) (3 pt) Encuentre la solución de la EDO usando transformada de Laplace:

$$y'' + y = \delta_\pi - \delta_{2\pi}, \quad y(0^+) = 0,\ y'(0^+) = 1,$$

donde δ_a denota la masa de Dirac en $t = a$. Determine de forma explícita la fórmula para $y(t)$ en los intervalos $[0, \pi)$, $[\pi, 2\pi)$ y $[2\pi, \infty)$.

(b) (3 pt) Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial:

$$y' = \sin(t) + \int_0^t y(t - r)\cos(r)dr, \quad y(0^+) = 0.$$

P2. Considere el sistema lineal de primer orden $x'(t) = Ax(t)$ para

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) (1 pt) Deduzca que el polinomio característico de A está dado por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2$$

y a partir de esto determine los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.

(b) (2 pt) Encuentre los vectores propios de A y las dimensiones de los subespacios propios asociados. ¿Por qué la matriz A es diagonalizable?

(c) (1 pt) Sea $U = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \mid x \text{ es solución de } x' = Ax\}$ el espacio vectorial de las soluciones del sistema. Determine una base de U.

(d) (1 pt) Determine $V \subset U$, el subespacio de todas las soluciones del sistema que convergen a 0 cuando $t \to \infty$ e indique su dimensión.

(e) (1 pt) Determine $W \subset U$, el subespacio de todas las soluciones del sistema que son constantes en t e indique su dimensión.

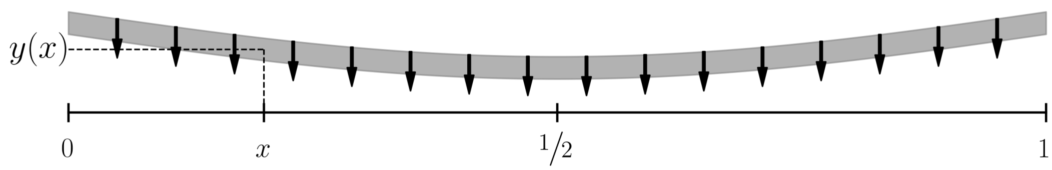
Indicación: el determinante de una matriz de 3x3 está dado en términos de determinantes de submatrices de 2x2 por:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

P3 Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4}(x) - \frac{d^2y}{dx^2}(x) = 1 \quad x \in [0,1], \qquad (E)$$

que modela la deformación $y(x)$ de una viga con una rigidez constante, y sometida a una fuerza externa (lado derecho de la EDO) constante y unitaria, como se muestra en la figura siguiente:



y con condiciones de borde dadas por:

$$y(0) = y(1) = 0, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(1) = 0.$$

Se desea encontrar la deformación $y(x)$ de la viga para $x \in [0,1]$. Para ello supondremos que las constantes $a = \frac{dy}{dx}(0)$, $b = \frac{d^3y}{dx^3}(0)$ son conocidas.

(a) (1.5 pt) Usando fracciones parciales, pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2-1)}\right\} = \sinh(x) - x.$$

(b) (1 pt) Usando el Teorema de Convolución, pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)}\right\} = \cosh(x) - \frac{x^2+2}{2}.$$

(c) (1.5 pt) Encuentre la transformada de Laplace de la solución $y(x)$ de (E) en función de a y b.

(d) (1 pt) A partir de lo anterior, calcule por antitransformada la deformación $y(x)$ en función de a y de b.

(e) (1 pt) Explique cómo calcular las constantes a y b y encuéntrelas explícitamente.

Indicación: recuerde que $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ y $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.