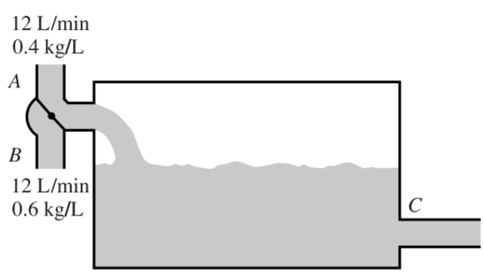
Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Miércoles 19 de Junio.

CONTROL 3

P1. *a)* (2 pt) Encontrar f continua y de orden exponencial, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \frac{3s-2}{s^2+4s+20}.$$

b) Un tanque contiene 500 l de una solución salina con una concentración inicial de sal de 0,2 kg/l. Durante los primeros 10 min se abre la válvula A añadiendo 12 l/min de una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/l. Después de 10 minutos, se cierra la válvula A y se abre la válvula B, la cual agrega solución salina con concentración de 0.6 kg/l a una tasa de 12 l/min. La válvula de salida C elimina la solución del tanque a una tasa de 12 l/min, manteniendo siempre el volumen constante.



1) (1,5 pt) Si $x(t)$ es la cantidad de sal en el tanque (en kg), pruebe que satisface una ecuación del tipo

$$x'(t) = -cx(t) + f(t),\ t \in [0, \infty);\ x(0) = 500 \cdot 0,2.$$

Determine c y $f(t)$.
Ind: Al plantear la ecuación, preocúpese que las unidades físicas sean coherentes entre los distintos términos.

2) (1 pt) Demuestre que $\mathcal{L}[x(t)]$ satisface

$$\left(s + \frac{12}{500}\right)\mathcal{L}[x(t)] = 100 + \frac{4,8}{s} + \frac{2,4}{s}e^{-10s}$$

para $s > 0$

3) (1,5 pt) Determine la función $x(t)$.

P2. Considere $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto f(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x < 6 \\ 3 & x \geq 6 \end{cases}$

a) (2,5 pt) Calcular $\mathcal{L}[f(x)](s)$.

b) (3,5 pt) Usando transformada de Laplace, resolver el problema

$$\begin{aligned} &y'' + y = f(x) \\ &y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{aligned}$$

P3. *a*) Considere la siguiente ecuación que modela un sistema masa resorte con un amortiguador, al que después de $\pi/2$ segundos es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito mediante el problema de valor inicial

$$x'' + 2x' + 10x = c\delta_{\frac{\pi}{2}}, \; t > 0; \; x(0) = 1, \; x'(0) = -1.$$

1) (2 pt) Determine la solución en términos del parámetro c.
2) (1 pt) ¿Qué valor debe tener c para que la masa quede detenida para $t > \frac{\pi}{2}$?.

b) (3 pt) Use transformada de Laplace para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= y + \operatorname{sen} t, \; x(0) = 2 \\ y' &= x + 2\cos t, \; y(0) = 0. \end{aligned}$$

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.

Tabla de Transformadas de Laplace y propiedades

Para la siguiente tabla de transformadas y propiedades elementales, suponemos $a \in \mathbb{R}$ y $\omega > 0$. Además denotamos para funciones f, g que admitan transformada $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ y $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$ respectivamente.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\operatorname{sen}(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$t^k,\ k \in \mathbb{N}$	$\dfrac{k!}{s^{k+1}}$
$\delta_a(t)$	e^{-as}
$H_a(t)$	$e^{-as} \cdot \frac{1}{s}$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$t^k f(t),\ k \in \mathbb{N}$	$(-1)^k \dfrac{d^k}{ds^k} F(s)$
$H_a(t) \cdot f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$(f * g)(t)$	$F(s) \cdot G(s)$

Donde se recuerda además que

- $\mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt.$
- $\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)]$, para todo α, β reales.
- $(f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)g(t-u)du$, es la convolución entre las funciones f y g.
- $H_a(t)$ es la función de Heaviside con salto en $t = a$, es decir $H_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$.

Obs: También se suele denotar $H_a(t)$ como $H(t-a)$.

- $\delta_a(t)$ es la delta o masa de dirac en $t = a$.