Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
MA2601, 2023-1. Secciones coordinadas

CONTROL 3

P1. a) **(2 pts)** Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, una matriz a coeficientes constantes e invertible. Demuestre que, dado $t_0 \geq 0$, se tiene la siguiente fórmula para la integral de la matriz exponencial,

$$\forall t \in [t_0, +\infty), \quad \int_{t_0}^{t} e^{uA} du = A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})$$

Indicación: Considere la función a valores matriciales $W(t) = \int_{t_0}^{t} e^{uA} du - A^{-1}(e^{tA} - e^{t_0 A})$

b) **(4 pts)** Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente por el método de variación de parámetros.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

indicando claramente los siguientes puntos en su resolución:
(i) cual es el sistema homogéneo asociado, **(ii)** los valores y vectores propios de la matriz del sistema, **(iii)** cual es la matriz fundamental del sistema, **(iv)** si la matriz fundamental es canónica o no, **(v)** cual es la solución homogénea (sin evaluar las constantes), **(vi)** cual es la solución particular, **(vii)** cual es la solución al problema de valor inicial planteado.

P2. Considere el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

donde $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es una función a valores matriciales, continua, no trivial, y de período $T > 0$, es decir $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponga además que $A(\cdot)$ es una función impar, es decir para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $A(-t) = -A(t)$. Sea $W(t)$ la matriz fundamental de este sistema que satisface $W(0) = I_{n\times n}$ (la matriz identidad). Pruebe que:

a) **(2 pts)** $W(t+T) = W(t)W(T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

b) **(2 pts)** $W(-t) = W(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) **(1 pt)** $W(T)^2 = I_{n\times n}$.

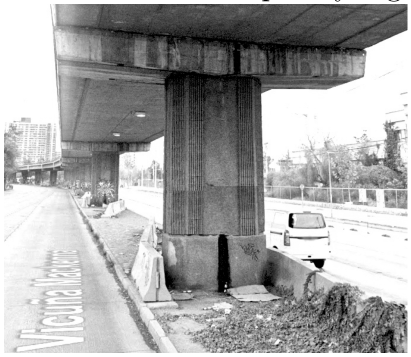
d) **(1 pt)** Todas las soluciones $\vec{x}(t)$ del sistema son periódicas de período 2T.

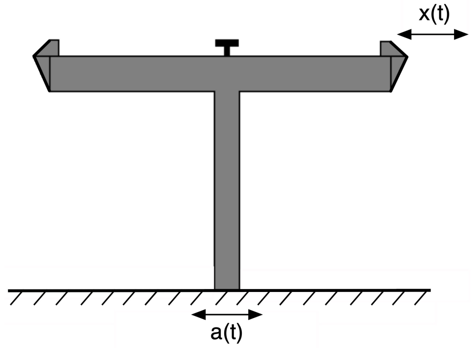
P3. Transformada de Laplace

a) **(4.0 pts)** Use transformada de Laplace para resolver el problema con condición inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = f(t) \\ y(0) = \dfrac{dy}{dt}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

b) **(2.0 pts)** En la figura, se muestra una foto de la estructura del tramo elevado de la Línea 5 del Metro de Santiago (izquierda) y un esquema (derecha) de un modelo dinámico – un oscilador de un grado de libertad – del pilar y vigas que afirman la losa donde deslizan los trenes.





Cuando la estructura es solicitada por un terremoto, el movimiento horizontal $x(t)$ de la parte superior de ésta queda modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 2\beta w \frac{dx}{dt}(t) + w^2 x(t) = -a(t)$$

donde $a(t)$ es la aceleración horizontal del suelo, $\beta > 0$ es la razón de amortiguamiento crítico y $w > 0$ es la frecuencia natural de oscilación de la estructura.

Se pide demostrar – usando transformada de Laplace – que cuando $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$, (es decir, la estructura esta en reposo y en su punto de equilibrio en la condición inicial) y considerando $\beta << 1$ (caso para hormigón armado), el movimiento horizontal de la estructura queda determinado por la Integral de Duhamel, como:

$$x(t) = -\frac{1}{w_d}\int_0^t a(\xi) e^{-\beta w(t-\xi)} sen(w_d(t-\xi))d\xi \quad \forall t > 0$$

donde $w_d = w\sqrt{1-\beta^2}$, es la frecuencia amortiguada de la estructura.

Indicación: si un polinomio de grado 2 admite raíces complejas $\lambda = \alpha \pm i\beta$, este se puede factorizar como $(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$

Tablas de Transformadas de Laplace: Aquí, se asume que $a \in I\!R$, $\omega > 0$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s)$ y que H es la función de Heaviside y u la función escalón unitario.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t^k, $k \in \mathbb{N}$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\delta(t)$	1
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$t^k f(t)$, $k \in \mathbb{N}$	$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k}F(s)$
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
$f(t) * g(t)$	$F(s)G(s)$