Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2602 - Ecuaciones Diferenciales 2022
Profesores: Alexander Frank, Álvaro Hernández, Axel Osses,
Jorge Aguayo y Alexis Fuentes

CONTROL 3 - 18/06/2022

La **P1** es obligatoria. Debe elegir entre **P2** o bien **P3** y entregar una sola de ellas.

P1. *a)* (2,0 pts.) Resuelva el siguiente sistema de EDO usando el método de la matriz exponencial:

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = 1 \\ x_2' &= 3x_1 - x_2, \quad x_2(0) = -3 \end{aligned}$$

y verifique que la solución tiende a cero cuando t tiende a infinito.

b) (2,0 pts.) Considere para $t > 0$ el sistema de ecuaciones a coeficientes variables:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\dfrac{2}{t^2}x + \dfrac{2}{t}y. \end{cases}$$

Muestre que

$$M(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental para el sistema y encuentre una solución del sistema anterior que satisfaga en $t = 1$ las condiciones iniciales $x(1) = 2$, $y(1) = 3$.

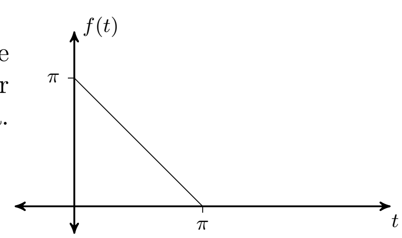
c) (2,0 pts.) Usando la matriz fundamental de la parte anterior, encuentre una solución particular para el sistema a coeficientes variables no homogéneo siguiente:

$$\begin{cases} x' &= y + t^2 \\ y' &= -\dfrac{2}{t^2}x + \dfrac{2}{t}y + t^3. \end{cases}$$

P2. Sea $z(t)$, para $t \geq 0$, la posición de un oscilador armónico que se encuentra en reposo para $t = 0$, y satisface la ecuación

$$z'' + 2z' + 2z = f(t),$$

donde $f(t)$ es un forzamiento no nulo sólo para $t \in [0, \pi[$. Este forzamiento comienza valiendo π en $t = 0$, para luego decaer linealmente hasta cero en $t = \pi$, como se muestra en la figura.



a) (0,5 pts.) Exprese $f(t)$ usando funciones de Heaviside.

b) (2,0 pts.) Encuentre la transformada de Laplace $\mathcal{L}[z(t)](s)$ de la solución de la ecuación del oscilador.

c) (3,5 pts.) Encuentre la solución $z(t)$, para $t \geq 0$, muestre que es continua y que para $t > \pi$

$$z(t) = -\left(\frac{1 + \pi + e^{\pi}}{2}\right) e^{-t}\cos(t) - \frac{\pi}{2}e^{-t}\operatorname{sen}(t).$$

P3. *a)* (2,0 pts.) Considere

$$G(s) = \ln\left(\frac{s^2+2s-8}{s^2+2s+10}\right).$$

Muestre que $G(s) \to 0$ cuando $s \to +\infty$, y encuentre una función continua $g(t)$, para $t > 0$, tal que $\mathcal{L}[g(t)](s) = G(s)$.

b) Considere las funciones

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t-\pi & \text{si} \quad t < \pi \\ \pi & \text{si} \quad t \geq \pi \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < \pi \\ e^{\pi-t}\,\text{sen}(t) & \text{si} \quad t \geq \pi \end{cases}$$

I. (1,0 pts.) Exprese φ y ψ usando funciones de Heaviside.

II. (1,0 pts.) Encuentre una expresión para la transformada de Laplace $\mathcal{L}[\varphi * \psi](s)$ de la convolución de ambas funciones.

III. (2,0 pts.) Usando antitransformada de Laplace, calcule la convolución $\varphi * \psi$.

Tiempo 3 horas.

Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
t^k	$\dfrac{k!}{s^{k+1}}$
$\operatorname{sen}(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$t\operatorname{sen}(\omega t)$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos(\omega t)$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{sen}(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)$	$\dfrac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
$h'(t)$	$s\mathcal{L}[h(t)](s)-h(0^+)$
$h''(t)$	$s^2\mathcal{L}[h(t)](s)-sh(0^+)-h'(0^+)$
$\displaystyle\int_a^t h(u)\,du$	$\dfrac{1}{s}\mathcal{L}[h(t)](s)-\dfrac{1}{s}\displaystyle\int_0^a h(u)\,du$
$H(t-a)h(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[h(t)](s)$
$H(t-a)h(t)$	$e^{-as}\mathcal{L}[h(t+a)](s)$
$e^{at}h(t)$	$\mathcal{L}[h(t)](s-a)$
$th(t)$	$-\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[h(t)](s)$
$\dfrac{h(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^{+\infty}\mathcal{L}[h(t)](u)\,du$
$h_1 * h_2\,(t)$	$\mathcal{L}[h_1(t)](s)\cdot\mathcal{L}[h_2(t)](s)$

Algunas fracciones parciales

$$\frac{6}{(s-2)(s+4)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+4}.$$
$$\frac{2}{s(s^2+2s+2)}=\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+2}.$$
$$\frac{2}{s^2(s^2+2s+2)}=\frac{s+1}{s^2+2s+2}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}.$$