UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2020
MA2601 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
PROFS: Alexis Fuentes, Axel Osses, Alexander Frank, Roberto Morales, Ariel Perez, Javier Ramírez.
FECHA: Miércoles 24 Junio, 18:00 a 22:00 HRS.

Control 3

INSTRUCCIONES: Debe escoger y entregar exactamente 2 de las 3 preguntas propuestas. La nota de control será el promedio simple de las dos preguntas escogidas y entregadas. En el caso de entregar 3 preguntas, se considerará el promedio de las dos preguntas que primero se subieron al sistema y no se corregirá ni considerará para la evaluación la tercera pregunta.

P1.- 1. (3 pts.) Resolver el sistema homogéneo con condición inicial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. El objetivo de esta parte es calcular e^{At}. Para ello

   a) (1.5 pts.) Demostrar que $A^{2k} = I_2$, y $A^{2k+1} = A$ para todo k natural.
   Ind: Use inducción.

   b) (1.5 pts.) Recordando que $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ y $\operatorname{senh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, use la definición de e^{At} junto con la parte anterior para deducir que

   $$e^{At} = \cosh(t) I_2 + \operatorname{senh}(t) A,$$

   donde I_2 es la matriz identidad de dimensión 2.
   Ind: $e^x = \sum\limits_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ válido para x real.

P2.- Para $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ considere el sistema

$$t\vec{X}' = A\vec{X}, \qquad t > 0. \tag{1}$$

1. (2 pts.) Se define $t^A := e^{A\ln(t)}$. Demostrar que t^A es una matriz fundamental de (1), esto es, $t\frac{d}{dt}(t^A) = At^A$ y t^A es invertible para todo $t > 0$.
2. Considere ahora el sistema

$$t\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad t > 0. \tag{2}$$

a) (2 pts.) Muestre, reemplazando en (2), que una solución particular de (2), está dada por $\vec{x}_p = t^A \vec{u}(t)$, con $\vec{u}$ derivable, donde $\vec{u} = \int (s^A)^{-1} \begin{bmatrix} 1/s \\ 2/s \end{bmatrix} ds$.

b) (2 pts.) Usar las partes anteriores para encontrar la solución general de (2).

P3.- Considere el sistema a coeficientes variables

$$\vec{X}' = A(t)\vec{X}. \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

donde las componentes de la matriz $A(t)$ son funciones continuas y satisfacen que $A(t+\pi) = A(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental asociada al sistema (3), tal que $\Phi(0) = I_n$ (I_n es la identidad $n \times n$).

1. (3 pts.) Demostrar que $\Phi(t+\pi) = \Phi(t)\Phi(\pi) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.
   Ind: Defina la función matricial $t \mapsto \varphi(t) = \Phi(t+\pi) - \Phi(t)\Phi(\pi)$. Encuentre el problema diferencial que satisface y aplique adecuadamente el Teorema de existencia y unicidad (TEU) para concluir que $\varphi \equiv O_{n\times n}$ (matriz nula).
2. (3 pts.) Suponga que la matriz $\Phi(\pi)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que en tal caso el sistema (3) posee una solución $\vec{X}(t)$, tal que $\vec{X}(t+\pi) = \vec{X}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
   Obs: Recuerde que si λ es un valor propio de un matriz A y $\vec{v}$ es su vector propio asociado entonces $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

NOTA:

- Esta es una evaluación individual, regida por el Reglamento General de Estudios de la Universidad de Chile y del Código de Ética de la FCFM
- Sus soluciones deben ser entregadas en el sitio de reclamos DIM de acuerdo a los dos instructivos (1.- ingreso a página de reclamos y 2.- entrega de evaluaciones coordinadas) publicados en la página de docencia DIM, link web: `https://docencia.dim.uchile.cl`. También se debe subir un respaldo de sus respuestas a U-Cursos.