Control 3
MA1101
Introducción al Álgebra 2024-3

P1.

(a) Sea $(G, \cdot)$ un grupo.

(i) (1 puntos) Sea $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1$. Muestre (sin usar inducción) que si $G$ es abeliano entonces

$$\forall a, b \in G \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

(ii) (2 punto) Muestre que si

$$\forall a, b \in G \quad (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

entonces $G$ es abeliano.

(b) Considere $E = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ con la suma y el producto usual, es decir

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \qquad \left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = aa' + 2bb' + (ab' + ba')\sqrt{2}$$

(a) (1 puntos) Encuentre el neutro de la suma.
(b) (1 puntos) ¿Existe el neutro de de la multiplicación? Justifique
(c) (1 puntos) Encuentre los divisores de cero.

Observación: no es necesario mostrar que $(E, +, \cdot)$ es anillo.

P2.

(a) (3 puntos) Muestre (sin usar inducción) que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ se tiene que

$$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$$

(b) (3 puntos) Para $\theta \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ encuentre todas las soluciones complejas de

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cos(k\theta) = i\sum_{k=0}^{n-1} z^k \sin(-k\theta)$$

P3.

Sean $+$ y $\cdot$ el producto usual en $\mathbb{C}$. Definamos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

(a) (1.5 puntos) Decida si $z_1 * z_2 = z_1 \cdot \overline{z}_2$ es una l.c.i. en $S_1$ o no
(b) (1.5 puntos) Muestre que $S_1$ con la multiplicación usual es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
(c) (1.5 puntos) ¿Es $(S_1, +, \cdot)$ un anillo? Justifique.
(d) (1.5 puntos) Y si cambiamos la suma usual por la suma de Hadamard dada por

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{z_1 + z_2}{|z_1 + z_2|}$$

¿es $(S_1, \oplus, \cdot)$ un anillo?