Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra MA1101-2023-1

Control 3

P1. A partir de una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A, se define una nueva relación $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ en A mediante

$$\forall x, y \in A, \quad x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \iff x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x.$$

i) (1.5 ptos.) Demuestre que $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ es una relación simétrica.

ii) (1.5 ptos.) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es refleja y transitiva, entonces la nueva relación $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ es de equivalencia.

iii) (1.5 ptos.) Recordemos la definición de la relación $|$ de divisibilidad en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad m|n \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\, n = k \cdot m.$$

Sabemos que $|$ es refleja y transitiva en $\mathbb{Z}$ (NO necesita demostrarlo), por lo que, tomando como $\mathcal{R}$ en ii) la divisibilidad $|$, $\mathcal{S}_|$ es de equivalencia.

Para $n \in \mathbb{Z}$ cualquiera, **se pide** determinar su clase de equivalencia respecto a la relación $\mathcal{S}_|$.

iv) (1.5 ptos.) Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, demuestre que $\forall x, y \in A,\ x\mathcal{S}_{\mathcal{R}}y \iff x = y$.

P2. *a*) Sean A, B conjuntos, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$. Considere la función $f : A \times B \to A$ definida por $f(x, y) = x$.

i) (2.0 ptos.) Demuestre que $f^{-1}(C) = C \times B$.

ii) (2.0 ptos.) Si $D \neq \emptyset$, demuestre que $f(C \times D) = C$.

b) (2.0 ptos.) Sean A, B conjuntos y $g : A \to B$ una función que satisface la propiedad

$$\forall\, C, D \subseteq A,\ [\, C \subsetneqq D \implies g(C) \neq g(D)\,].$$

Pruebe que g es inyectiva.

Observación: La notación $C \subsetneqq D$ significa que $C \subseteq D$ pero $C \neq D$, por lo cual D tiene al menos un elemento que no pertenece a C.

Indicación: Utilice la propiedad satisfecha por g, con C, D adecuados.

DURACIÓN: 1 hora y 30 minutos.
Justifique adecuadamente sus respuestas.
No olvide poner su NOMBRE y RUT en sus hojas de respuesta para identificarlas.

¡¡Mucho éxito!!