Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601, Semestre Verano.
Miércoles 15 de Enero 2025.

# CONTROL 2

**P1.** *a*) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, considere la EDO de segundo orden

$$2yy'' = (y')^2 + 1, \quad x \in I. \tag{1}$$

Para funciones $x \mapsto y(x)$, tal que $y(x) > 0$, $\forall x \in I$.

1) (0,5 pts.) Demuestre que la sustitución $p = y'$, transforma (1) a la siguiente ecuación de variables separables

$$2y\frac{dp}{dy}p = p^2 + 1. \tag{2}$$

2) (2 pts.) Resuelva (2) y con ello obtenga la solución general de (1).

*b*) (3,5 pts.) Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln(2x), \quad x > 0.$$

Resolviendo primero la parte homogénea y por variación de parámetros calcular una solución particular.

**P2.** *a*) (1 pto.) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo, considere la EDO lineal de segundo orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{3}$$

Con $a(x), b(x), c(x)$ funciones continuas en $I$, tal que $a(x) + b(x) + c(x) = 0$, $\forall\, x \in I$. Pruebe que en tal caso $y(x) = e^x$ es solución de (3).

*b*) Considere la EDO lineal

$$2xy'' + (1 - 4x)y' + (2x - 1)y = e^x,\ x > 0. \tag{4}$$

1) (0,5 pts.) Aplique adecuadamente la parte *a*) para encontrar una solución de la EDO homogénea asociada a (4).
2) (1,5 pts.) Encuentre la solución general de dicha EDO homogénea.
3) (2 pts.) Use variación de parámetros para encontrar una solución particular de (4) y determine su solución general.
4) (1 pto.) Sea $y_p(x)$ la solución particular calculada en 3), **compruebe** que efectivamente es solución de (4).

**P3.** **[Modelo estelar]**.
Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p$ y densidad $\rho$ son funciones radiales ($0 \le r \le a$) tales que $p(r) = k\rho^2(r)$ donde $k$ es una constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia $r$ del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación universal nos entrega las siguientes relaciones

$$p'(r) = -g(r)\rho(r) \qquad r^2 g(r) = 4\pi G \int_0^r s^2\rho(s)ds\ ,$$

donde $G$ es la constante de gravitación y las derivadas están tomadas con respecto a $r$.

*a*) (1,5 pts.) Deducir que $\rho$ satisface la ecuación diferencial

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}. \tag{5}$$

*b*) (1 pto.) Demuestre que la sustitución $u = r\rho$, transforma (5) en la EDO lineal de segundo orden en $u$

$$u'' + \alpha^2 u = 0. \tag{6}$$

*c*) (1,5 pts.) Resolver (6).

*d*) (1 pto.) Deduzca la solución para $\rho$, para ello note que $\rho(r)$ debe ser **positiva** y **finita** si $r \to 0$, es decir $\rho(0) = \lim_{r\to 0^+} \rho(r) < \infty$ ($\rho(0)$ es dato).

*e*) (1 pto.) Explique por qué este modelo predice estrellas de tamaño máximo para el valor de $a = \frac{\pi}{\alpha}$.

**TIEMPO: 3 hrs.**

**No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.**