Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-1, Coordinado.
Miércoles 7 de Mayo. Profesores: Sa. Martínez, F. Ortega, A. Osses

CONTROL 2

P1. a) (3 pts) Considere la EDO
$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}.$$

I) (1 pts) Encuentre la solución de la ecuación homogénea asociada.

II) (1 pts) Encuentre la solución particular de la ecuación.

III) (1 pts) Encuentre la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

b) (3 pts) Considere la EDO
$$(D-3)^2(D^2+4)D^2 y = 4e^x.$$

I) (1 pts) Encuentre una base del espacio de soluciones de la EDO homogénea asociada, indicando a qué raíz del polinomio característico se asocia cada solución de la base encontrada.

II) (1.5 pts) Muestre que Ae^x es una solución de la EDO no-homogénea para un valor específico de la constante A, e indique dicho valor de A. **Ind:** Aplique el operador diferencial a la función Ae^x para encontrar la constante A.

III) (0.5 pts) ¿Cuál es la solución general de la EDO?

P2. a) (3 pts) Determine la solución general de la siguiente EDO:
$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad x > 0.$$

I) (1.5 pts) Busque primero una solución de la forma $y_1(x) = x^n$ y no olvide establecer la ecuación normalizada.

II) (1.5 pts) Use la fórmula de Liouville (método de reducción de orden) para establecer la otra solución linealmente independiente.

b) (3 pts) Considere la ecuación $y'' + q(x)y = 0$ donde q es una función continua para $x \in \mathbb{R}$.

I) (1 pto) Pruebe que el Wronskiano de cualquier par de soluciones linealmente independientes es constante.

II) (1 pto) Usando lo anterior, si se sabe que una de las soluciones de la ecuación está dada por $(1+x)^2$, encuentre la otra solución linealmente independiente y calcule el valor exacto del Wronskiano.

III) (1 pto) Calcule la solución general de la ecuación $y'' + q(x)y = 1 + x$.

P3. Las pequeñas oscilaciones de una cuerda con un extremo fijo y otro libre y sometida a una fuerza externa conducen al estudio de una EDO de la forma:
$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = f(x), \quad x \in [0,\pi] \tag{1}$$
$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(\pi) = 0, \tag{2}$$

donde f es una función continua en $[0,\pi]$ y $k > 0$ es una constante.

a) (2 pts) Encuentre una base $\{y_1, y_2\}$ de soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (1) y calcule el Wronskiano asociado $W(y_1, y_2)$.

b) (2 pts) Use variación de parámetros para demostrar que una solución particular y_p de la ecuación (1) está dada por:

$$y_p(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \sin(k(x-s))f(s)ds.$$

Ind: Le puede ser útil la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.

c) (2 pts) Suponga que k es un entero positivo. Usando que la solución general del problema tiene la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_p$ donde y_1, y_2 e y_p son las soluciones encontradas en las partes anteriores y C_1, C_2 son constantes, pruebe que al imponer las condiciones de borde (2) se obtiene:

$$y(x) = a_k \sin(kx) + y_p(x), \quad \text{donde} \quad a_k = -\frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(ks)f(s)ds.$$

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.