Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Miércoles 8 de Mayo.

CONTROL 2

P1. **a)** Considere la EDO

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x}$$

i) (0.75 pto) Encuentre la solución homogénea y_h.

ii) (1.5 ptos) Encuentre la solución particular y_p usando el método de variación de parámetros.

iii) (0.75 pto) Encuentre la solución de la EDO que satisface las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

b) Considere la EDO

$$(D - 2)(D^2 + 1)y = 4e^{2x}$$

i) (1.0 pto) Encuentre la solución homogénea y_h.

ii) (0.5 ptos) ¿De qué EDO homogénea lineal de primer orden es solución el lado derecho de la EDO anterior?

iii) (1.0 pto) Usando lo anterior, encuentre la forma que tiene la solución particular y_p. Explique su razonamiento.

iv) (0.5 ptos) Evalúe la o las constantes que aparecen en la solución particular, reemplazándola en la EDO original.

P2. Para $x > 0$, considere el operador diferencial

$$P(xD) = (xD - \alpha_1)(xD - \alpha_2)(xD - \alpha_3)$$

donde $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3$ son **distintos entre sí** y por definición $(xD - \alpha_j)y = xy' - \alpha_j y$.

i) (1 pto) Demuestre que el orden de la composición en $P(xD)$ no importa, es decir para α y β reales:

$$(xD - \alpha)(xD - \beta)y = (xD - \beta)(xD - \alpha)y$$

ii) (1 pto) Demuestre la propiedades siguientes:

$$(xD - \alpha)x^\beta = (\beta - \alpha)x^\beta \qquad (1)$$

$$(xD - \alpha)(x^\beta f(x)) = x^\beta (xD - \alpha + \beta)f(x) \qquad (2)$$

donde α, β son reales y f es una función derivable.

iii) (1 pto) A partir de lo anterior verifique que x^{α_j} son soluciones de la EDO homogénea $P(xD)y = 0$ para $j = 1, 2, 3$.

iv) (1 pto) Demuestre que $\{x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, x^{\alpha_3}\}$ son linealmente independientes. Para ello muestre que el Wronskiano en $x = 1$ es $W(1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)$ y explique por qué esto basta para probar la independencia lineal. (Ver indicación).

v) (1 pto) ¿Por qué se aplica la teoría de EDO lineales de orden superior vista en clases en este caso? ¿Por qué $\{x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, x^{\alpha_3}\}$ es una base de soluciones homogéneas? ¿Qué dimensión tiene el espacio de soluciones homogéneas? Concluya que $P(xD)y = 0$ tiene como solución

$$y_h(x) = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + c_3 x^{\alpha_3} \quad \text{para} \quad x > 0$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes reales.

vi) (1 pto) Usando las partes anteriores, en particular las propiedades (1) y (2), encuentre la solución homogénea y la forma que tiene la solución particular de la EDO siguiente:

$$(xD-3)(xD-4)(xD-5)(x^2y) = x^{3/2}, \quad \text{con} \quad x > 0.$$

Indicación:

$$\text{Dado } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}.$$

P3. Motivados por las oscilaciones de un líquido que ocurren en la chimenea de una represa al cerrar una válvula, se plantea un modelo simplificado de un tubo en U (ver Figura).

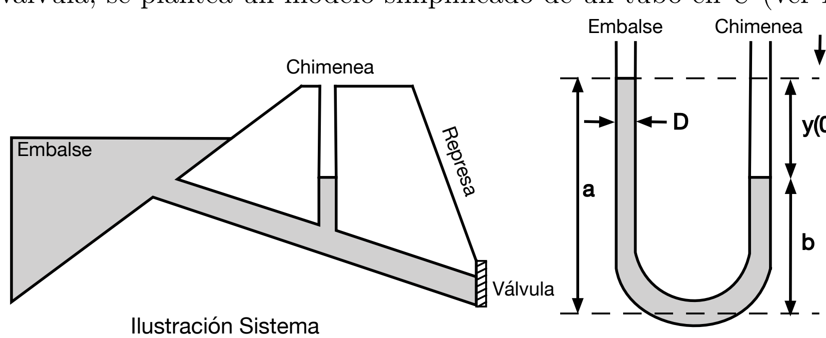

Ilustración Sistema Represa - Embalse - Chimenea

Modelo Simplificado

La diferencia de altura $y(t)$ entre los extremos de la columna de líquido en el tubo con forma de U (en gris), de diámetro $D > 0$, largo total entre sus extremos $L > 0$ y viscosidad $\nu \geq 0$, sujeta a una aceleración de gravedad g, satisface:

$$y'' + 2ky' + \omega y = 0, \quad t \geq 0, \quad k = \frac{16\nu}{D^2}, \quad \omega = \frac{2g}{L}.$$

Inicialmente $y(0) = b - a$ tal que $|b - a| < \frac{L}{4}$, $\;y'(0) = -v_0, \;\; v_0 > 0$. Aquí, v_0 es una velocidad inicial que se usa para representar un fenómeno llamado *golpe de ariete*.

i) (2.5 ptos) Resuelva la ecuación con condiciones iniciales si $\nu = 0$ (sin fricción). Discuta cualitativamente graficando $y(t)$. Para graficar, considere que $y(0) = b - a < 0$, e indique claramente las condiciones iniciales en el gráfico.

ii) (2.5 ptos) Si ahora $\nu > 0$, resuelva la ecuación con condiciones iniciales para el caso $k^2 < \omega$. Discuta cualitativamente graficando $y(t)$. Para graficar, considere que $y(0) = b - a < 0$, e indique claramente las condiciones iniciales en el gráfico.

iii) (1 pto) Para $\nu > 0$ y en el caso $k^2 < w$, encuentre una condición sobre v_0 en función de los parámetros del problema para evitar un rebalse, esto es, imponer que $|y(t)| \leq \dfrac{L}{4}$.
Indicación: use la identidad $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ y la definición geométrica de las funciones sen() y cos(), para expresar la solución como $A(t)\operatorname{sen}(\theta\, t + \phi)$, donde $A(t)$ es su amplitud y θ, ϕ constantes adecuadas.

TIEMPO: 3 hrs. **No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.**