Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias MA2601, 2023-1
Profs. Jorge Aguayo, Francisco Ortega, Axel Osses, Ariel Pérez

CONTROL 2

P1. Considere, para x en el intervalo $[0, L]$, $L > 0$, $p > 0$, la siguiente EDO lineal de segundo orden a coeficientes variables

$$(1+x^2)y'' + xy' + p^2 y = 0, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

a) **(2 pts)** Haciendo el cambio de variables $z(u) = y(\sinh(u))$, es decir $x = \sinh(u)$, muestre que la EDO anterior se reduce a la siguiente EDO lineal a coeficientes constantes

$$z'' + p^2 z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(u_L) = 0,$$

donde se define $u_L := \sinh^{-1}(L)$.

b) **(3 pts)** Encuentre la forma general que tiene la solución de la EDO anterior en $z(u)$, y explique por qué esta solución existe para un número infinito de valores de $p = p_k$, $k \in \mathbb{Z}$ que debe determinar.

c) **(1 pto)** A partir de lo anterior, y usando que $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, encuentre la expresión explícita de las soluciones $y_k(x)$ de la EDO original en función de k y de L.
Indicación: Las funciones hiperbólicas $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ y $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ satisfacen la identidad $\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$.

P2. a) **(3 pts)** Para $x > 0$, sabiendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x\ln(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea, demuestre con el Wronskiano que éstas son linealmente independientes y usando variación de parámetros encuentre una solución particular de

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{4}{x}\ln(x).$$

Indicación: Note que $\frac{d}{dx}\ln^n(x) = n\frac{\ln^{n-1}(x)}{x}$.

b) **(3 pts)** Sean y_1 e y_2 dos soluciones con Wronskiano $W(x)$ no nulo de

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad \text{para } x \in (0, \ell)$$

tales que $y_1(0) = 0$, $y_1(\ell) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2(\ell) = 0$. Calcule $W(0)$, $W(\ell)$ y pruebe que el valor promedio de a_1:

$$M_1 := \frac{1}{\ell}\int_0^\ell a_1(x)\,dx$$

puede ser obtenido mediante la fórmula

$$M_1 = \ln\left(-\frac{y_1'(0)}{y_2'(\ell)}\right)^{1/\ell}.$$

Indicación: Puede serle útil la fórmula de Abel: $W(x) = C\exp(-\int_0^x a_1(x)dx)$.

P3. a) **(3 pts)** Usando el método de constantes indeterminadas, dé la forma de la solución homogénea y una solución particular (es decir sin evaluar las constantes) de

$$\begin{aligned} (D-2)^2(D^2+1)^2\, y &= x^2 e^{3x} \\ D^3(D^2-6D+10)^2\, y &= x^2\cos(x)e^{3x} \end{aligned}$$

b) La ecuación de Schrödinger para $x > 0$

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left(k + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) y = 0$$

describe las oscilaciones en los electrones del átomo de hidrógeno donde k y l son números enteros. Esta ecuación se puede escribir como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1) **(2 pts)** Haciendo $y(x) = u(x)v(x)$ y anulando el coeficiente de u' que aparece, determine v (considere el caso en que $v \neq 0$) y deduzca que la ecuación original resulta equivalente a

$$u'' + r(x)u = 0, \qquad r(x) = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'.$$

2) **(1 pto)** Sabiendo que la solución u puede oscilar si $r(x) > 0$ para todo x, encuentre una condición suficiente entre k y l para que hayan oscilaciones.

Tiempo: 3 horas