Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA2602 - Ecuaciones Diferenciales 2022
Profesores: Alexander Frank, Álvaro Hernández, Axel Osses,
Jorge Aguayo y Alexis Fuentes

CONTROL 2

P1. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y periódicas con periodo $T > 0$, o sea,

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad a(t+T) = a(t) \qquad b(t+T) = b(t)$$

Considere la ecuación diferencial

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{1}$$

a) (3,0 pts.) Demuestre que el problema de Cauchy dado por

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

posee solución única para todo $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

b) (1,5 pts.) Sea u una solución de la ecuación (1) tal que $u(0) = u(T)$. Demuestre que $\varphi(t) = u(t+T) - u(t)$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t) \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

c) (1,5 pts.) Sea u solución de la ecuación (1). Aplicando los resultados de las partes anteriores, pruebe que u es periódica con periodo $T > 0$ si y solo si $u(0) = u(T)$.
[Indicación: Analice la existencia y unicidad de solución de la ecuación (2)].

P2. Considere la ecuación diferencial lineal de orden superior

$$t^3 y''' + 4t^2 y'' + 10ty' - 10y = 169t\ln(t); \quad t \in]0, +\infty[\tag{3}$$

a) (1,5 pts.) Muestre que el cambio de variable $t = e^u$, $z(u) = y(e^u)$ lleva la ecuación (3) en

$$z''' + z'' + 8z' - 10z = 169ue^u.$$

b) (2,0 pts.) Encuentre todas las soluciones $y(t)$ de la ecuación homogénea asociada a (3). Muestre que hay infinitas soluciones $y(t)$ de esta ecuación homogénea tales que $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

c) (2,5 pts.) Encuentre todas las soluciones $y(t)$ de (3). Muestre que hay infinitas soluciones $y(t)$ de (3) tales que $y(1) = 0$.
[Indicación: Es posible resolver la ecuación obtenida en la parte *a)* mediante el método de coeficientes indeterminados.]

P3. Considere la ecuación de segundo orden homogénea

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = 0, \quad s \in]0, 1[\tag{4}$$

a) (0,5 pts.) Compruebe que $v_1(s) = 1/(1-s^2)$ es solución de (4).

b) (2,5 pts.) Encuentre una solución $v_2(s)$ de (4) que sea l.i. con $v_1(s)$, y con ello todas las soluciones $v(s)$ de (4).

c) (3,0 pts.) Encuentre todas las soluciones $v(s)$ de

$$v'' - \frac{1}{s}v' - \frac{8s^2}{(1-s^2)^2}v = \frac{s^4}{1-s^2}, \quad s \in]0, 1[.$$