

## CONTROL 2 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 2021

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JESSICA TRESPALACIOS Y NICOLÁS VALENZUELA

### Indicaciones importantes:

1. Lea cuidadosamente cada párrafo del enunciado antes de intentar resolverlo.
2. Escriba sus desarrollos lo más detallada y nítidamente posibles; esto es muy relevante.
3. Posee dos horas para resolver este control, más dos horas adicionales para escanearlo.
4. Puede usar sus apuntes y material docente de cátedra y auxiliar.

Un modelo muy simplificado de acción de una vacuna sobre una población es el siguiente:

$$(V) \quad \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

donde  $x_1(t)$  es la población sin vacunar y  $x_2(t)$  es la población ya vacunada.

**Parte 1.** Usando matriz exponencial y la fórmula de Duhamel, encuentre todas las soluciones de (V). Describa lo que sucede cuando  $t \rightarrow +\infty$  en este caso.

*Indicación:* Si escoge los vectores propios ortonormales, entonces la matriz  $P$  correspondiente satisface  $P^{-1} = P^T$ .

**Parte 2.** Suponga ahora que la aparición de una nueva variante se ve reflejada por una delta en  $a > 0$ :

$$(Vo) \quad \begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + \delta_a(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) + e^{-2t}. \end{cases}$$

Usando transformada de Laplace, encuentre  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  si  $x_1(0) = m_1$ ,  $x_2(0) = m_2$  dados. Describa la diferencia entre este resultado y el de la parte 1.

*Indicación:*  $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ ,  $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ .