UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2021
MA2601, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES COORDINADAS

CONTROL 2

P1.- Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante fija. Considere el siguiente sistema lineal no homogéneo:

$$\begin{aligned} x' &= (2a+1)x - (2a+2)y + 3e^{-2t} - 2te^{-t} \\ y' &= 2ax - (2a+1)y - 2te^{-t} \end{aligned}$$

(a) (0,5 pts.) Encuentre A y $B(t)$ de modo que el sistema adopte la forma $X' = AX + B(t)$

(b) (2,0 pts.) Calcule e^{tA}.

(c) (2,5 pts.) Encuentre la solución general del sistema.

(d) (1,0 pts.) Fije $a = 0$. Elija un vector X_0 tal que si $X(0) = X_0$, entonces $X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

P2.- Para este ejercicio, se asume que el cálculo de la transformada de Laplace de una función tanto vectorial como matricial se realiza componente a componente.

(a) Considere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de modo que para todo $s > 0$, la matriz $sI - A$ es invertible, donde I es la matriz identidad de 2×2. Considere además una solución $X(t)$ del sistema lineal homogéneo con condición inicial

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

.

I. (0,5 pts.) Explicar brevemente por qué $X(0^+) = X_0$.

II. (1,0 pts.) Escriba la relación vectorial $X'(t) = AX(t)$ como un sistema de dos ecuaciones lineales, aplique la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema, y concluya que

$$(sI - A)\mathcal{L}[X(t)](s) = X_0.$$

III. (1,0 pts.) Muestre, por otro lado, que $\mathcal{L}[X(t)](s) = \mathcal{L}[e^{tA}](s)X_0$.

IV. (1,0 pts.) Demuestre que $\mathcal{L}[e^{tA}](s) = (sI - A)^{-1}$, para $s > 0$.
[INDICACIÓN: Puede ser útil saber que si M es una matriz de $m \times n$ tal que $Mx = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $M = O_{m\times n}$, la matriz nula de $m \times n$.]

(b) (2,5 pts.) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Usando la igualdad de **P2.-***(a)*IV., demuestre que $e^{tA} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$.

P3.- *(a)* Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz cuyos coeficientes satisfacen la relación

$$(a-d)^2 + 4cb = 0.$$

I. (0,5 pts.) Demuestre que A posee un único valor propio λ_0, y exprese dicho valor λ_0 en términos de los coeficientes de A.

II. (0,5 pts.) Verifique que $(A - \lambda_0 I)^2 = O_{2\times 2}$ y concluya que $(A - \lambda_0 I)^k = O_{2\times 2}$ para todo $k \geq 2$, donde $O_{m\times n}$ denota la matriz nula de $m \times n$.

III. (2,0 pts.) Calcule e^{tA}.
[INDICACIÓN: Escribir $A = (A - \lambda_0 I) + \lambda_0 I$, y aplicar la propiedad $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ cuando $AB = BA$.]

(b) Encuentre, en cada caso, una función continua g para $t > 0$ que satisfaga la igualdad dada. Justifique.

I. (1,5 pts.) $\mathcal{L}[g(t)](s) = \dfrac{5s^2 + 24s + 39}{(s+3)^2(s+1)}; \qquad s > -1.$

II. (1,5 pts.) $\mathcal{L}[g(t)](s) = \dfrac{3s-2}{s^2+4s+20} + \dfrac{e^{-s}}{s^3}; \qquad s > 0.$