Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra Lineal MA1102-2025-2

# Control 2 - Otoño 2025

**Importante**: *En este enunciado, la matriz representante de la función lineal $T\colon U \to V$ con respecto a las bases (finitas) $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V$ en $U, V$, respect., se denotará $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_U}$ (a veces también denotada $[T]_{\mathcal{B}_V \leftarrow \mathcal{B}_U}$).*

**P1.** Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ donde $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función lineal tal que $f(v_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ y $f(v_3) = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$.

*a*) (1.5 ptos) Determine $f(v)$, donde $v = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

*b*) (2.0 ptos) Determine una base del núcleo de $f$, es decir, de $\mathrm{Ker}(f)$, e indique si la función es inyectiva.
Indicación: Estudie para qué reales $\alpha, \beta, \gamma$ el vector $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ pertenece a $\mathrm{Ker}(f)$.

*c*) (2.0 ptos) Determine una base de $\mathrm{Im}(f)$ e indique si la función es epiyectiva.

*d*) (0.5 ptos) ¿Es $f$ un isomorfismo? Justifique.

**P2.** Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ bases de un espacio vectorial $V$. Sea $T\colon V \to V$ una función lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

*a*) (2.0 ptos) Determine las coordenadas de los vectores $3v_1 + v_2$ y $T(3v_1 + v_2)$ en términos de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, respectivamente. Es decir, calcule $[3v_1 + v_2]_{\mathcal{B}}$ y $[T(3v_1 + v_2)]_{\mathcal{B}'}$.

*b*) (2.0 ptos) Calcule la matriz de pasaje de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y úsela junto a la matriz $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ para demostrar que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

*c*) (2.0 ptos) Calcule $[T \circ T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
Indicación: Puede serle útil usar la parte b).

**P3.** Sea $V$ un espacio vectorial y sean $\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2\}$ tales que $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ es base de $V$.

*a*) (2 ptos) Argumente que existe una función lineal $L : V \to V$ tal que

$$L(v) = \begin{cases} 2v, & \text{si } v \in \mathcal{B}_U,\\ 3v, & \text{si } v \in \mathcal{B}_W.\end{cases}$$

*b*) (2 ptos) Determine $[L + S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V}$ sabiendo que $[S]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V} = 3I_5$.

*c*) (2 ptos) Demuestre que $L(U) = U$ donde $U = \langle B_U \rangle$ (por definición de imagen, $L(U) = \{L(u) \colon u \in U\}$).

**Tiempo: 3.0 hrs.**