Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 2
MA1101
Introducción al Álgebra 2024-3

P1.

(a)

(i) (2 puntos) Para cada $b \in \mathbb{Q}$ definamos $H_b = \left\{a^b : a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$. Muestre que H_b es numerable. **Indicación**: considere la función $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to H_b$ dada por $\phi(a) = a^b$.

(ii) (2 puntos) Muestre que $H = \left\{a^b : a \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{Q}\right\}$ es numerable. **Indicación**: Escriba H como unión de conjuntos numerables, sobre un conjunto numerable.

(b) (2 puntos) Sean A y B conjuntos tales que $A \cup B$ es numerable. Muestre que A es numerable o B es numerable.

P2.

(a) Considere

$$S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

(i) (1.5 puntos) Calcule el valor de la suma de los términos de índice par que componen S, es decir $k = 2i$, con $i = 1, \ldots, n$.

(ii) (1.5 puntos) Calcule el valor de la suma de los términos de índice impar que componen S, es decir $k = 2i - 1$, con $i = 1, \ldots, n$.

(iii) (1 punto) En base a lo calculado en las partes anteriores, entregue el valor de S.

(b) (2 puntos) Encuentre el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{n} k k!$$

Indicación. Arme sume un 1 conveniente que contenga un término factorial

P3.

(a) (3 puntos) Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ demuestre (sin usar inducción) que

$$\binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + 2\binom{n}{2} x^2(1-x)^{n-2} + 3\binom{n}{3} x^3(1-x)^{n-3} + \cdots + n\binom{n}{n} x^n = nx$$

(b) (3 puntos) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ demuestre (sin usar inducción) que

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \left(4^j - 2^j 3^{n-j}\right) = 3^n - 1$$