



CONTROL 2

Nota: Recuerde justificar adecuadamente sus argumentos; si está usando resultados conocidos, indíquelo claramente y verifique las hipótesis.

P1. a) (2.0 pts.) Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(k) = \begin{cases} k-1, & \text{si } k \text{ es par} \\ k, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Determine el conjunto imagen de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ por f y el conjunto pre-imagen de $\{2, 5\}$ por f , es decir, $f(\{0, 1, 2, 3, 4\})$ y $f^{-1}(\{2, 5\})$.

b) (2.0 pts.) Calcule, para $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n 2^i (3^{i+1} + 4^{i-1}).$$

c) (2.0 pts.) Para $n \in \mathbb{N}$, calcule

$$\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{k=1}^{n^2} (i-1) \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{n+1}.$$

P2. a) Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 0$, si $x < 1$ y $f(1) = 1$, y $g(x) = 1$, si $x > 0$, y $g(0) = 0$. Se define la relación $\mathcal{R}$ en el intervalo $[0, 1]$ como sigue:

$$\forall a_1, a_2 \in [0, 1], (a_1 \mathcal{R} a_2 \Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) \wedge g(a_1) = g(a_2)).$$

(I) (2.0 ptos.) Muestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(II) (1.0 pto.) Determine $[0]_{\mathcal{R}}$ y $[1]_{\mathcal{R}}$.

(III) (1.0 pto.) Determine el conjunto cociente $[0, 1]/\mathcal{R}$.

b) Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función arbitraria. Se define $\preceq$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como sigue:

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2, \left((a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2 \wedge f(-b_1) \leq f(-b_2)) \right).$$

(2.0 pto.) Demuestre que $\preceq$ es antisimétrica en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si y solamente si f es inyectiva.

P3. a) (3 ptos.) Para $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $J_i = \{1, 2, \dots, i\}$. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Muestre que

$$\left| \bigcup_{i=1}^n (\{i\} \times (J_i! \setminus J_{(i-1)!})) \right| = n! - 1.$$

b) (3.0 ptos.) Use el teorema del binomio y la igualdad

$$\binom{m}{k} \binom{m-k}{j} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{k},$$

válida para $0 \leq j, k \leq m$, para demostrar que

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^n n! (-2)^i \binom{2n}{n-i} \binom{n+i}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$