Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Álgebra MA1101-2021-1

# Control 2

**P1.** a) (3.0 pts) Para $n \in \mathbb{N}$ se definen, $s_{2n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1-i}{i}$ y $s_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{2(n+1)-i}{i}$.

Pruebe, sin usar inducción, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{2(n+1)} = s_{2n+1} + s_{2n}$.

b) Un *alfabeto* se define como un conjunto finito de símbolos o caracteres. Para un alfabeto $A$ y $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$, llamamos *palabra de largo* $\ell$ *sobre el alfabeto* $A$ a una secuencia finita de caracteres en $A$. Por ejemplo, *abba* y *aabaa* son palabras sobre el alfabeto $A = \{a, b\}$, de largos 4 y 5 respectivamente.

b.1.) (1.5 pts) Sea $\ell \geq 1$. Determine el número de palabras de largo $\ell$ sobre el alfabeto $\{a, b\}$

b.2.) (1.5 pts) Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{a, b\}$. Pruebe que $\mathcal{S}$ es numerable.

**P2.** Sea $(G, \star)$ un grupo con neutro $e \in G$. Sea $\mathcal{R}$ una relación de **orden** en $G$ que verifica la siguiente propiedad,

$$\forall x, y, z \in G,\ x\mathcal{R}y \implies x \star z \mathcal{R} y \star z.$$

Sean $G_+ = \{g \in G \mid e\mathcal{R}g\}$ y $G_- = \{g \in G \mid g\mathcal{R}e\}$.

a) (1.5 pts) Pruebe que $G_+ \cap G_- = \{e\}$.

b) (1.5 pts) Pruebe que $\forall g \in G$, $g \in G_+ \implies g^{-1} \in G_-$.

c) (1.5 pts) Pruebe que $(G_+, \star)$ es una estructura algebraica (es decir, que $\star$ es una ley de composición interna en $G_+$).

Asuma que el resultado de la parte c) sigue siendo válido al reemplazar $G_+$ por $G_-$ (no lo demuestre).

d) (1.5 pts) Pruebe que si $G$ es abeliano, entonces $(G_+, \star)$ y $(G_-, \star)$ son estructuras algebraicas isomorfas.

**Duración:** 2 horas.