Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601, Semestre Verano.
Miércoles 8 de Enero 2025.

CONTROL 1

P1. *a*) (2,5 pts.) Determinar todas las funciones derivables en el 1er cuadrante del plano cartesiano, cuya gráfico pasa por el origen y tales que si (x, y) es cualquier punto de tal gráfico, entonces el rectángulo de vértices $(0,0),(x,0),(x,y),(0,y)$ queda dividido en dos superficies, una de las cuales (la que está **por sobre** la gráfica) tenga k veces el área de la otra, donde $k > 0$ es real (dato).

b) (3,5 pts.) Resolver el problema de valor inicial

$$y' = \frac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}, \ y(1) = 2, \ \text{para} \ x > 0.$$

Donde $x \mapsto y(x)$ es tal que $y(x) > 0$, para todo $x > 0$.

P2. *a*) (2,5 pts.) Utilice una sustitución adecuada para resolver la EDO: $y' = 1 + e^{y-x+5}$, indicando el mayor intervalo de definición de la solución como tal.

b) Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo y $x \mapsto p(x), q(x)$ funciones continuas en I. Considere la EDO

$$y' + p(x)y = q(x)y\ln(y), \tag{1}$$

para funciones $x \mapsto y(x)$ tales que $y(x) > 0$, para todo $x \in I$.

1) (1,5 pts.) Demuestre que la sustitución $v = \ln(y)$ transforma (1) en la EDO lineal

$$v' - q(x)v = -p(x), \ x \in I. \tag{2}$$

2) (2 pts.) Resolver (2), para $I =]0, \infty[$, $p(x) = e^x$ y $q(x) = -\frac{2}{x}$.

P3. *a*) (3,5 pts.) Un grupo de historiadores han investigado la existencia de una antigua civilización, según testimonios se presume que estuvo ubicada al interior de una aldea escondida en una localidad conocida como *Pautef* a $\sqrt{7}$ kilómetros de la capital. Muy poco se sabe de esta mítica población, sólo que comenzó con $\frac{\pi^2}{6}$ integrantes y que tuvo una muy corta existencia, análisis hacen sospechar que fue **a lo más** de $\frac{\pi}{2}$ décadas. Científicos de reconocida reputación han planteado el siguiente modelo para la evolución de esta población

$$\frac{dp}{dt} + \operatorname{tg}(t)p = \operatorname{sen}^3(t)p^2, \ t \in]0, \pi/2[. \text{ Con } p(0) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

Donde $p(t)$ es la población en tiempo t. Resolver la EDO dada en (3) y compruebe si efectivamente este modelo predice la extinción de la población en el tiempo indicado.

b) (2,5 pts.) Resolver la EDO : $y' - e^x y + y^2 = e^x$. Para ello debe identificar que tipo de ecuación conocida se trata, el cambio de variable correspondiente y **sólo deje expresada** la solución general que se obtiene.
Obs: $\int e^{-e^x} dx$ no tiene primitiva elemental.

TIEMPO: 3 hrs.
No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.