Universidad de Chile. FCFM-DIM

Control 1 Coordinado: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Primavera 2024

Profesoras: Gabrielle Nornberg y Jessica Trespalacios.

Indicaciones: Lea cuidadosamente cada párrafo del enunciado. Escriba **ordenadamente** y en detalle cada una de sus respuestas, y cada pregunta en hojas separadas. No se permite el uso de apuntes ni celulares.

P1. **Calentamiento Global:** Un modelo simplificado para el **clima global terrestre** viene dado por le EDO (Graves et al., 1993)

$$(CG) \qquad R\frac{dT}{dt}(t) = S(1-\alpha) - (A + BT(t))\,,$$

donde

- $T = T(t)(°C)$ es la temperatura promedio global de la capacidad calórica de superficie de la Tierra,
- $R > 0$ es una constante que mide el promedio global de la capacidad calórica de la superficie terrestre,
- S es el parámetro de insolación y α es una medida promedio de *albedo* (cuánto calor refleja la superficie terrestre). A, B son parámetros empíricamente determinados.

Finalmente, t se mide en años, donde $t = 0$ representa el **período actual.**

El término $S(1-\alpha)$ representa la **energía total promedio del Sol** sobre la Tierra, mientras que $A + BT(t)$ mide la **radiación saliente**, devuelta al espacio. Por lo mismo se necesita que $B > 0$.

a) (1pt) Encuentre las soluciones estacionarias de la ecuación (CG).

b) (3pts) Use el TFC para encuentrar la única solución de la ecuación (CG) con condición incial $T(0) = T_0$.

c) (2pts) A partir de las mediciones por satélite, las mejores estimaciones actuales de los parámetros A y B son $A = 202W/m^2$ y $B = 1{,}90W/m^{2\circ}C$. Si la la radiación saliente devuelta al espacio en el período actual es de $231,26W/m^2$, describa como quedaría explícitamente la solución encontrada en el item (b), sabiendo además que la energía total promedio del Sol es de $239,4W/m^2$. **Para la resolución puede obviar las unidades de los parámetros**.

P2. Dos poblaciones de aves, A y B, comparten un mismo ambiente y están sujetas a una restricción de espacio o tamaño constante. Sean $x_A(t)$ y $x_B(t)$ las correspondientes **fracciones del total** de cada una de estas poblaciones, en el instante t. Luego, tenemos

$$(C) \qquad \begin{cases} x_A(t) + x_B(t) = 1, \\ \\ 0 \le x_A(t), x_B(t) \le 1. \end{cases} \qquad \text{para todo tiempo.}$$

Cada una de las poblaciones se produce con una tasa particular (o *fitness*): $x_A(t)$ se reproduce a tasa $a > 0$, y $x_B(t)$ a tasa $b > 0$. También supondremos que las fracciones de poblaciones originales son no triviales: ambas $x_A(0)$ y $x_B(0)$ son positivas y menores que 1. Se pueden ver entonces (no lo pruebe) que éstas obedecen la *ley de evolución por selección* siguiente:

$$(D) \qquad \begin{cases} x_A'(t) = x_A(t)(a - \phi(t)), \\ x_B'(t) = x_B(t)(b - \phi(t)), \end{cases}$$

donde $\phi = \phi(t)$ es una función de acoplamiento, dependiente de x_A y x_B, y a encontrar.

a) (1 pts) Muestre que si (C) y (D) se cumplen, entonces necesariamente el acoplamiento satisface

$$\phi(t) = ax_A(t) + bx_B(t).$$

b) (1pt) Bajo las mismas hipótesis anteriores, muestre que $x_A(t)$ satisface la EDO

$$(E) \qquad x_A'(t) = -(a-b)x_A(t)(x_A(t)-1), \qquad x_A(0) \in (0,1) \quad \text{dado.}$$

c) (1pt) Describa cualitativamente como se comporta $x_A(t)$ cuando: A tiene mayor fitness que B ($a > b$) y cuando B tiene mayor fitness que A ($b > a$).

d) (3pts) Resuelva la EDO (E) y muestre que $x_A(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y que si A tiene mayor fitness que B, entonces la población de A invade completamente a la de B, es decir,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x_A(t) = 1.$$

Concluya finalmente que lo opuesto ocurre si B tiene mayor fitness.

P 3. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = P(t) + Q(t)y + R(t)y^2,$$

se conoce como la **ecuación de Ricatti**.

a) (3pts) Una ecuación de Riccati se puede resolver **por dos sustituciones consecutivas**, *siempre y cuando* conozcamos una solución particular, y_1, de la ecuación. **Muestre que la sustitución** $y = y_1(t) + u(t)$ reduce la ecuación de **Ricatti** a una ecuación de **Bernoulli** con $n = 2$. A continuación, resuelva la ecuación de Bernoulli en ese caso particular y encuentre la ecuación lineal a la que se reduce.

b) (3pts) Determine una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + \frac{y(t)}{t} - y^2, \qquad t > 0, \qquad x(1) = 2.$$

donde $y_1 = t$ es una **solución conocida** de la ecuación.