Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2025-1, Coordinado.
Miércoles 2 de Abril. Profesores: Sa. Martínez, F. Ortega, A. Osses

CONTROL 1

P1. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) (2 ptos) $xyy' = y^2 - x^2$, $x > 0$.

b) (2 ptos) $y' = \dfrac{x+y}{x+y+1}$. **Ind.:** Considere el cambio de variables $z(x) = x + y(x)$. Puede dejar la solución expresada en forma implícita.

c) (2 ptos) $(y' - y^2)\cos(x) + y(2\cos^2(x) + \sin(x)) = \cos^3(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.
Ind.: Verifique que una solución particular es $y_p = \cos(x)$ y considere el cambio de variables $u = y - y_p$. Posteriormente, considere el cambio de variable $z = 1/u$. Asimismo, recuerde también que una primitiva de $\tan(x)$ está dada por $-\ln[\cos(x)]$ para $x \in (-\pi, \pi)$.

P2. *a*) (3 ptos) Determine la solución de $y' = f(y)$ con $y(0) = 1$. La función f está dada por: $f(y) = y^3$ si $y > 1$, $f(y) = y^2$ para $y \leq 1$. Indique el intervalo de existencia de la solución.

b) (3 ptos) Suponga que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución del problema de Cauchy o de valor inicial siguiente:

$$\begin{cases} y' = \cos^3(y)\sin(2t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Demuestre que $y(t) = y(-t)$ para $t \in \mathbb{R}$, es decir, que y es una función par.
Ind.: No resuelva la ecuación sino que use el hecho de que por el teorema de existencia y unicidad la solución del problema de valor inicial es única. No olvide verificar las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Recuerde la identidad $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

P3. La siguiente ecuación se usa para modelar el comportamiento de una población afecta a cambios estacionales:

$$N' = a(t)N, \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

La función a representa la tasa neta de crecimiento (cuando $a(t) > 0$) o decrecimiento (cuando $a(t) < 0$) per cápita. La función a es continua y tiene período $T > 0$, es decir $a(s+T) = a(s)$ para $s \geq 0$, dando cuenta de los cambios estacionales que afectan a la población.

a) (1.5 ptos) Demuestre que la solución general de la ecuación (1) está dada por:

$$N(t) = N(0)\exp\left(\bar{a}t + \mu(t)\right),$$

donde $\bar{a} := \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds$ es el promedio temporal de la tasa a y $\mu(t) := \int_0^t (a(s) - \bar{a})\,ds$.

b) (1.5 pto) Demuestre que $\mu(t)$ es periódica de periodo T. Concluya que si $\bar{a} = 0$ entonces todas las soluciones de la ecuación (1) son periódicas.
Ind.: Note que $\int_0^{t+T}(a(s) - \bar{a})\,ds = \int_0^T (a(s) - \bar{a})\,ds + \int_T^{t+T}(a(s) - \bar{a})\,ds$.

c) (1.5 pto) Muestre que todas las soluciones de la ecuación (1) convergen a 0 cuando $t \to \infty$ si $\bar{a} < 0$.

d) (1.5 ptos) Bosqueje el diagrama de pendientes correspondiente a la ecuación

$$N' = \operatorname{sen}(t)\,N, \quad t \geq 0$$

en la región que se indica en el plano de la **hoja adjunta**. Comente en la misma hoja: ¿cómo se comportan las soluciones en este caso?

TIEMPO: 3 hrs.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas, incluyendo la del diagrama de pendientes.

Nombre y rut: ....