Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, MA2601 2024-1, Coordinado.
Miércoles 3 de Abril.

CONTROL 1

P1. *a)* Considere la ecuación diferencial

$$y' + \frac{y}{x^2} = \frac{y\ln(|y|)}{x}. \tag{1}$$

1) (1,5 pts.) Sea y una solución de (1) definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $y(x) \neq 0$, $x \in I$. Demuestre que $z(x) = \ln(|y(x)|)$ satisface la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

2) (2,5 pts.) Use la parte anterior para determinar la solución de la ecuación (1) con $y(1) = -1$. Determine el intervalo más grande donde esa solución está definida.

b) (2 pts.) Determine al menos tres soluciones del problema de valor inicial

$$y' = y^{\frac{1}{3}}, \text{ con } \ y(0) = 0.$$

P2. La siguiente ecuación diferencial se utiliza para modelar la densidad de una población de peces $P(t)$, considerando que son capturados con una tasa de pesca constante

$$\frac{dP}{dt} = P(1-P) - \frac{1}{4}, \tag{2}$$

a) (1,5 pts.) Bosqueje el diagrama de pendientes asociado a (2) en el plano (P, t).
Ind. Le será útil estudiar el signo de la función $P(1-P) - \frac{1}{4}$.

b) (1,5 pts.) Sea P una solución de (2), con condición inicial $P(0) \geq 0$. A partir del diagrama conjeture si la población se extingue, es decir $P(T) = 0$ para algún T, o sobrevive, es decir $P(t) > 0$ para todo t.
Ind. Distinga los casos $P(0) > \frac{1}{2}$, $P(0) = \frac{1}{2}$, $0 < P(0) < \frac{1}{2}$.

c) (1,5 pts.) Determine todas las soluciones (expresiones matemáticas) de la ecuación (2), explicitando el mayor intervalo donde están definidas.

d) (1,5 pts.) Para $P(0) \geq \frac{1}{2}$, determine $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$.

P3. *a)* (3,5 pts.) Use la sustitución $z = x^2 + y^2$, para resolver el problema

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}, \quad y(0) = 1.$$

b) (2,5 pts.) Encuentre la solución del problema con condición inicial

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1, \quad y(0) = 1.$$

Ind. Piense en un cambio de variables adecuado.

TIEMPO: 3 hrs.
No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.