Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
MA2601, 2023-1. Secciones coordinadas

CONTROL 1

P1. Ejercicios

a) **(3 puntos)** Tomando la sustitución $v = \ln y$, resuelva la ecuación diferencial

$$y'(x) + xy(x) = -\frac{2}{x} y \ln y \quad \text{para } x > 0$$

b) **(3 puntos)** Determine una solución positiva de la siguiente ecuación para $x > 1$.

$$y' + \left(\frac{x}{x^2-1}\right) y + \left(\frac{e^{2x}}{x^2-1}\right) \frac{1}{y} = 0$$

P2. Un paracaidista de masa $m > 0$ se lanza desde un avión y abre su paracaídas. La fuerza de fricción que frena al paracaidista es proporcional al cuadrado de la velocidad con que cae, con una constante de proporcionalidad $k > 0$. Sea $g > 0$ la aceleración de gravedad.

a) **(1 punto)** Si $v(t)$ representa la velocidad con que cae el paracaidista, considerando el sentido de caída como positivo, explique por qué v verifica la ecuación diferencial

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k\,[v(t)]^2$$

b) **(4 puntos)** Defina $\alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. Verifique que $v_1(t) = \alpha$ es una solución particular de la ecuación. Use dicha información para calcular la solución general con la condición inicial $v(0) = v_0 \geq 0$.
Indicación: Exprese la solución en función del parámetro α.

c) **(1 punto)** Asuma que $v_0 > \alpha$. Verifique que $v(t)$ es decreciente y que $v(t) \in (\alpha, v_0]$.

P3. Considere el siguiente problema de Cauchy para $y_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{t}{1+t^2} \operatorname{Arctan}(y) \cos(y) \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

a) **(1 punto)** Encuentre todas las soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) **(3 puntos)** Pruebe que, para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, el problema de Cauchy posee solución única.

c) **(2 puntos)** Demuestre que las soluciones para cada $y_0 \in \mathbb{R}$ son acotadas.
Indicación: Analice diferentes tipos de condiciones iniciales. Suponga que y no es acotada superiormente y deduzca que existe $T > 0$ tal que $y(T)$ es igual a una solución constante.