CONTROL 1

P1. Para $x > 0$ considere la ecuación diferencial

$$xy' + \frac{1-x^2}{1+x^2}\, y = \frac{4\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}} y^{1/2} \tag{1}$$

a) (2 pts.) Sea $x \mapsto y(x) > 0$ que satisface (1) y $x \mapsto u(x)$ función, sea $u = yx$ demostrar que tal sustitución transforma (1) en la ecuación de Bernoulli

$$u' - \frac{2x}{1+x^2}\, u = \frac{4\,\mathrm{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}} u^{1/2} \tag{2}$$

b) (3 pts.) Calcular la solución de (2).

c) (1 pto.) Usar la parte anterior y la sustitución propuesta para determinar la solución general de (1).

P2. Hallar la familia de curvas para las cuales la longitud del tramo definido por la recta tangente entre el punto de contacto (x, y) y el eje de las ordenadas OY es igual al segmento que se origina entre el origen y el punto que nace en la intersección del eje de las ordenadas con la recta tangente. Para resolver este problema siga los siguientes pasos

a) (1.5 pts.) Considere $P = (x, y)$ un punto en el primer cuadrante (ie $x > 0, y > 0$) (no se preocupe de los demás cuadrantes), perteneciente a un miembro de la familia buscada. Designe por $Q = (0, b)$ al punto de intersección de la recta tangente descrita con el eje OY. Para el caso $y > b > 0$, imponga la condición del enunciado para demostrar que se tiene la relación $b = \frac{x^2+y^2}{2y}$.

b) (2.5 pts.) Si θ es el ángulo que forma la tangente con el eje OX, muestre que $\mathrm{tg}(\theta) = \frac{y-b}{x}$ y concluya que se tiene la siguiente EDO

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx}. \tag{3}$$

Clasifique el tipo de EDO obtenida en (3).

c) (2 pts.) Resolver la EDO en (3). De ser posible identifique la familia de curvas buscada, explicitando sus príncipales elementos.

P3. La propagación de una simple acción en una población (por ejemplo, los conductores que encienden las luces de sus automóviles al atardecer) depende parcialmente de circunstancias externas (oscurecimiento) y parcialmente de una tendencia a imitar a los demás que ya han realizado la acción. En este caso, la proporción $t \mapsto y(t)$ de personas que ya han realizado la acción pueden describirse por la ecuación

$$y' = (1-y)(x(t) + by) \tag{4}$$

donde $t \mapsto x(t)$ mide el estímulo externo y b es el coeficiente de imitación.

a) (2 pts.) Encuentre el valor de k que hace que la función constante $t \mapsto y_1(t) = k$ sea solución de (4).

b) (4 pts.) Usando lo anterior encuentre otra solución de (4) para el caso en que $t \mapsto x(t) = at$. La respuesta puede dejarla en forma integral.

PRIMITIVAS ÚTILES

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

CÓNICAS

- $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio $R > 0$.
- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes $a, b > 0$.
- $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$, $(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$ parábolas de vértice (x_0, y_0) y foco $(p + x_0, y_0)$ y $(x_0, y_0 + p)$ respectivamente.

RECUERDE QUE

- Una EDO de Bernoulli (de incógnita y) se resuelve con el cambio de variables (sustitución) $z = y^{1-n}$ donde n es el grado de la no linealidad.
- Una EDO de Ricatti (de incógnita y) se resuelve con el cambio de variables $y = y_p + 1/z$ donde y_p es una solución particular de la EDO original.

TIEMPO: 3 horas.

No olvidar colocar nombre y RUT identificando sus hojas de respuestas.