

CONTROL 1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 2021

PROF. CLAUDIO MUÑOZ, PROF. AUXS. JESSICA TRESPALACIOS Y NICOLÁS VALENZUELA

Indicaciones importantes:

1. Lea cuidadosamente cada párrafo del enunciado antes de intentar resolverlo.
2. Escriba sus desarrollos lo más detallada y nítidamente posibles; esto es muy relevante.
3. Posee dos horas para resolver este control, más dos horas adicionales para escanearlo.
4. Puede usar sus apuntes y material docente de cátedra y auxiliar.

En varias aplicaciones (el potencial gravitatorio de una estrella en equilibrio, o de una esfera cargada eléctricamente, por ejemplo), aparece naturalmente la ecuación siguiente:

$$(E) \quad (1 - t^2)x''(t) - 2tx'(t) + n(n + 1)x(t) = 0, \quad t \in (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n , las soluciones de esta EDO representan “modos de oscilación” naturales a los problemas considerados.

Parte 1.

1. (2 pts.) Usando apropiadamente factor integrante, encuentre todas las soluciones de (E) si $n = 0$, y también la solución que satisface $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
2. (2 pts.) También si $n = 0$, y **usando variación de parámetros**, encuentre la solución general de (E) que posee lado derecho $f(t) = 1/(1 - t^2)$.
3. (2 pts.) Si ahora $n = 1$, encuentre una solución particular de (E) de forma polinómica lineal. Luego, encuentre todas las soluciones.

Parte 2.

1. (2.5 pts.) Si $n = 2$, encuentre una solución particular no nula a (E) en forma de polinomio cuadrático, y **una** solución de (E) tal que $x(-1) = x(1) = 1$.
2. (3.5 pts.) Para cualquier n fijo, escriba el algoritmo predictor-corrector para calcular la solución numérica de (E) con datos iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$ dados en el intervalo $[0, 1/2]$ y con paso $h > 0$ dado.

Datos:

$$\int \frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) + C.$$
$$\int \frac{1}{t^2(1 - t^2)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) + C.$$