UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2021
MA2601, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES COORDINADAS

Control 1.

INSTRUCCIONES: Debe entregar obligatoriamente la pregunta 1 y elegir y entregar solamente una de las preguntas restantes. La nota de control será el promedio simple de las dos preguntas entregadas. En el caso de entregar 3 preguntas, se considerará el promedio de la pregunta 1 y la última que se haya subido al sistema entre las preguntas restantes y no se corregirá ni considerará para la evaluación la pregunta restante.

P1.- Considere un cuerpo flotando en un fluido viscoso bajo la acción de la gravedad. Ante una perturbación del líquido, su desplazamiento vertical con respecto al punto de equilibrio, es modelado por la siguiente ecuación

$$y''(t) - 2\epsilon y'(t) + (\epsilon^2 + \delta^2)y(t) = f(t), \quad t \in [0, \infty[, \tag{1}$$

donde δ, ϵ son constantes reales y $f(t)$ una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo.

1. (2 pts) Resuelva la ecuación homogénea asociada a la ecuación anterior. Para ello, considere los casos $\delta \neq 0$ y $\epsilon \in \mathbb{R}$; además, $\delta = 0$ y $\epsilon \neq 0$.
2. (3 pts) Considere $\epsilon = 0$. Utilizando el método de los coeficientes indeterminados resuelva la EDO no homogénea para $f(t) = \cos(t)$.
3. (1 pts) Describa el comportamiento de la solución cuando δ tiende a 1.

P2.- Considere la ecuación diferencial a coeficientes variables de orden 2:

$$x^2y''(x) - xy'(x) + 5y(x) = f(x), \; x \in]0, \infty[. \tag{2}$$

1. (1 pts) Utilizando el cambio de variable $z(u) = y(e^u)$ y $x = e^u$, deduzca que la EDO (2) se reduce a la EDO lineal a coeficiente constantes en z con variable independiente u
$$z''(u) - 2z'(u) + 5z(u) = f(e^u).$$
2. (2 pts) Encuentre la solución general de la ecuación no homogénea (2) para $f(x) = x$.
3. (3 pts) Utilizando el método de variación de parámetros resuelva la EDO no homogénea para $f(x) = x\sec(2\ln(x))$.

P3.- Considere la el problema

$$(py')' + \lambda y = f, \text{ en }]0,1[\quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{3}$$

para $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en todo el intervalo $[0, 1]$, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua y $\lambda \in \mathbb{R}$. Suponga además que $p(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

1. (1 pts) Sean y_1, y_2 dos soluciones homogéneas y l.i. de (3). Demuestre que el Wronskiano W asociado a y_1, y_2 es igual a

$$W(x) = \frac{C}{p(x)},\ \forall x \in]0,1[.$$

para algún $C \neq 0$.

2. (2 pts) Considere el caso $f = 0$. Demuestre que si y es una solución no nula del problema (3), entonces

$$\lambda = \frac{\int_0^1 p y'^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}$$

y por lo tanto $\lambda \geq 0$. **Indicación:** Multiplique la ecuación por y y luego integre por partes el término $\int_0^1 (py)' y dx$.

3. (3 pts) Para el caso $p = 1$ y $f = 0$, encuentre todos los posibles valores de λ para los cuales el problema tiene solución y las soluciones no nulas para cada uno de esos valores de λ. Observe que la solución para cada λ no es única, ¿contradice esto el TEU para ecuaciones lineales? Si f no es nula, ¿es única la solución para este caso? Justifique. **Indicación:** Utilizando el item anterior justifique que la solución es de la forma $A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Luego utilice las condiciones de borde adecuadamente para encontrar λ y la solución correspondiente.