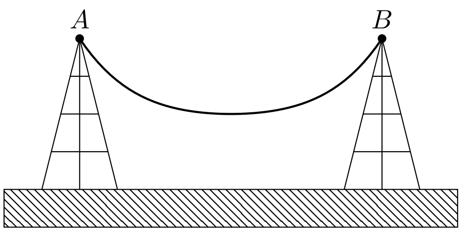
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
SEMESTRE OTOÑO 2020
MA2601 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
SECCIONES: 2,3,4,5,6,7.

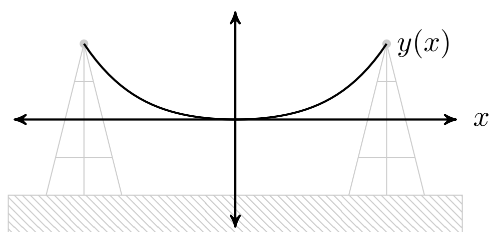
Control 1

P1.- (6,0 pts.) Determinar la solución general de la siguiente EDO de segundo orden

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+e^t}, \ t \in \mathbb{R}.$$

P2.- Desde los extremos A y B de dos torres idénticas se encuentra suspendido un cable homogéneo sometido únicamente a la acción de su propio peso, tal como se muestra abajo en la figura izquierda.





El objetivo de este problema es demostrar que, si colocamos el origen del sistema de coordenadas en la parte más baja del cable, tal como se indica en la figura de la derecha, entonces la forma del cable coincide con el gráfico de la función dada por

$$y(x) = \frac{H}{\omega}\left(\cosh\left(\frac{\omega x}{H}\right) - 1\right),$$

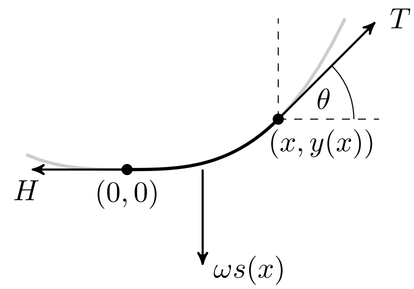
donde ω es el **peso por unidad de largo** en cada punto del cable y H es la magnitud de la **tensión** del cable en su **punto más bajo**. Por ser un cable homogéneo, ω se considera constante.

Para demostrar lo pedido considere que la forma del cable es el gráfico de una función suave [1] desconocida $y(x)$, con su punto más bajo en el origen del sistema de coordenadas, y siga los siguientes pasos

1. (0,5 pts.) A partir de las figuras anteriores ¿cuál debería ser el valor de $y'(0)$ y porqué?.

[1] Es decir, de una función real derivable con derivada continua.

2. (2,0 pts.) Considere las fuerzas externas actuando sobre todo el segmento de cable que está entre los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(x, y(x))$, cuyo largo denotaremos por $s(x)$. Cada fuerza junto con el valor de su magnitud aparece en la figura a la derecha.
   Usando que el cable está en reposo, plantee el equilibrio de fuerzas en sus componentes horizontal y vertical, y a partir de esto deduzca que $y(x)$ debe satisfacer la ecuación diferencial $y'' = \frac{\omega}{H}\sqrt{1+(y')^2}$.



   Ind: Trate de eliminar la magnitud T. Recuerde además que $s(x) = \int_0^x \sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt$.

3. (2,5 pts.) Usando el cambio de variables $u = y'$, encuentre la solución general de la EDO obtenida en la parte anterior.
   Ind: Al momento de resolver una de las integrales puede necesitar el cambio de variables $u = \operatorname{senh}(\alpha)$. Recuerde que $1 + \operatorname{senh}^2(\alpha) = \cosh^2(\alpha$.

4. (1,0 pt.) Finalmente determine $y(x)$ usando la información de y e y' en $x = 0$.

P3.- Para p, q funciones continuas en un intervalo no trivial [2] $I \subset \mathbb{R}$, considere la EDO de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad . \qquad (*)$$

Sean y, z **soluciones linealmente independientes** de (*) en $\mathcal{C}^2(I)$. Considere $a, b \in I$, con $a < b$ de modo que $y(a) = y(b) = 0$ pero $y(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$, es decir, a y b son **ceros consecutivos** de y.

Ind: A lo largo del problema, puede ser útil el teorema del valor intermedio: Para una función real f continua en $[x_1, x_2]$ tal que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen distinto signo, existe un $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x^*) = 0$.

1. (2,0 pts.) Definamos $W(x) := W(y(x), z(x))$ el Wronskiano asociado. Muestre que $W(x)$ nunca es cero y tiene el mismo signo para todo $x \in I$. Encuentre además expresiones para $W(a)$ y $W(b)$.
2. (2,0 pts.) Muestre que $y'(a)$ y $y'(b)$ son reales no nulos y tienen distinto signo.
   Ind: Para ver los signos de $y'(a)$ y $y'(b)$, muestre primero que $y(x)$ tiene el mismo signo para todo $x \in]a, b[$ y después analice los límites laterales $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{y(a+h)-y(a)}{h}$ y $\lim\limits_{k\to 0^-} \frac{y(b+k)-y(b)}{k}$.
3. (2,0 pts.) Muestre que $z(a)$ y $z(b)$ no son nulas y tienen distinto signo. Concluya que existe un único $c \in]a, b[$ de modo que $z(c) = 0$.

REGLAMENTO : Debe escoger y entregar 2 de las 3 preguntas propuestas.

[2]Es decir, que tiene interior no vacío. Por ende quedan descartados intervalos del tipo $]x_0, x_0[$ ó $[x_0, x_0]$.