Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 1
MA1101
Introducción al Álgebra 2024-3

P1.

(a) (3 puntos) Sabiendo que la proposición

$$\neg[(s \Leftrightarrow \neg q) \Longrightarrow \neg r] \Longrightarrow [(p \vee q) \wedge r]$$

es falsa, determine el valor de verdad de p, q, r y s.

(b) (3 puntos) Considere la sucesión de reales u_n dada por

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 3 \\ u_n &= 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \end{cases}$$

demuestre usando inducción que $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = 2^n + 1\right)$

P2. Sean X e Y dos conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Se define

$$\begin{aligned} F : X \times X &\to Y \times Y \\ (x_1, x_2) &\mapsto F(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) \end{aligned}$$

(a) (2 puntos) Muestre que f es inyectiva si y solo si F es inyectiva y que f es epiyectiva si y solo si F es epiyectiva.

(b) (2 puntos) Muestre que la afirmación

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(X))(F(A \times B) = f(A) \times f(B))$$

es verdadera.

(c) (2 puntos) Muestre que la afirmación

$$(\forall C, D \in \mathcal{P}(Y))(F^{-1}\left((C \times D)^c\right) = \left(f^{-1}(C) \times f^{-1}(D)\right)^c$$

es verdadera.

P3. Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definamos $E = \{1, 2, 3, \ \ldots, n\}$. En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación R mediante

$$A \, R \, B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(a) (1.5 puntos) Muestre que R es una relación de orden. Muestre que es una relación de orden total si $n = 1$, y que es parcial si $n > 1$.

(b) (1.4 puntos) Decida si R tiene elementos máximos o mínimos y si estos son únicos o no.

(c) (0.8 puntos) Realice un diagrama de Hasse de R considerando $n = 3$.

(d) Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ dados por $A = \{x_1, x_2, \ \ldots, x_j\}$ y $B = \{y_1, y_2, \ \ldots, y_k\}$ con $x_1 < x_2 < \cdots < x_j$ e $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$ diremos que $A \prec B$ si

$$(\exists i_0 \in E)((\forall i < i_0)(x_i = y_i) \wedge (x_{i_0} < y_{i_0}))$$

Diremos que $A \preceq B$ si $A \prec B \vee A = B$. (por ejemplo $\{1, 2, 3\} \prec \{1, 2, 4, 5\}$ pues los elementos están ordenados en forma creciente y coinciden hasta obtener una diferencia en la tercera posición)

En $\mathcal{P}(E)$ se define la relación S mediante

$$A \, S \, B \Leftrightarrow (|A| < |B|) \vee (|A| = |B| \wedge A \preceq B)$$

(i) (1.5 puntos) Se sabe que S es una relación de orden (no es necesario mostrarlo). Muestre que S es extensión de la relación de orden parcial R, es decir muestre

* S es una relación de orden total
* $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))(A \, R \, B \Longrightarrow A \, S \, B)$

(ii) (0.8 puntos) Asuma que $n = 3$. Sobre el diagrama de Hasse de R encontrado anteriormente, realice un diagrama de Hasse de S.