Control 1 - Otoño 2025

P1. Considere el siguiente sistema donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo:

$$\begin{aligned} x + \ \ y + az &= 1, \\ x + ay + \ \ z &= a, \\ ax + \ \ y + \ \ z &= a^2. \end{aligned} \tag{1}$$

a) (2.0 ptos) Determine la inversa de la matriz A asociada al sistema lineal en (1) cuando $a = -1$.

b) (4.0 ptos) Indique todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el sistema en (1):

i. tiene solución única,

ii. no tiene solución,

iii. tiene infinitas soluciones.

Solución:

a) Cuando $a = -1$, la matriz asociada al sistema lineal del enunciado es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aumentando A con la matriz identidad I_3 y escalonando "hacia abajo", obtenemos [**0.3 ptos por evidenciar, implícita o explícitamente, que hay que escalonar**]:

$$(A \mid I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donde primero le restamos la fila 1 a la fila 2 y le sumamos la fila 1 a la 3, y después le sumamos la fila 2 a la 3 [**0.7 ptos por el escalonamiento "hacia abajo"**].
Multiplicando las filas 2 y 3 por $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente, y escalonando hacia arriba, sigue que:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

donde primero le sumamos la fila 3 a las filas 1 y 2, y después le restamos la fila 2 a la 1 [**0.7 ptos por el escalonamiento "hacia arriba"**]. Sigue que la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

([**0.3 ptos por exhibir la inversa**])

[**Deducir -0.5 ptos por cada error aritmético hasta un máximo de -1.5 ptos**]

b) Identificamos la matriz aumentada del sistema y escalonamos [**1.0 ptos por el escalonamiento**]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & a^2-1 \end{pmatrix}.$$

[**Deducir -0.4 ptos por cada error aritmético hasta un máximo de -0.8 ptos**]

Sigue que:

i. Si $a = -2$, como la tercera fila de la matriz aumentada y escalonada no contiene un pivote y el "lado derecho de la ecuación" queda distinto de 0 [**0.6 ptos por justificar**], se tiene que el sistema no tiene solución [**0.4 ptos por concluir**].

ii. Si $a = 1$, entonces el sistema tiene solución y hay variables libres (específicamente, $x_2 y x_3$ son variables libres) [**0.6 ptos por justificar**]. Luego, hay infinitas soluciones [**0.4 ptos por concluir**].

iii. Si $a \notin \{1, -2\}$, entonces hay un pivote en cada una de las tres primeras columnas [**0.6 ptos por justificar**]. Luego, en este caso, el sistema tiene una unica solución [**0.4 ptos por justificar**].

Indicaciones para la corrección:

- Si se equivocan en algún cálculo aritmético al escalonar en la parte *b*), evaluar que las respuestas a las partess *i.*, *ii.*, *iii.*, sean consistentes con la matriz escalonada a la que llegaron.
- En la parte *b.ii*) es necesario decir que hay variables libres, pero no que las identifiquen.

P2. *a*) Sea V el espacio de las matrices de 2×2 a coeficientes en $\mathbb{R}$ cuyos coeficientes suman cero. Es decir,

$$V = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a+b+c+d = 0\right\}.$$

1) (2.0 ptos) Demuestre que las tres siguientes matrices forman una base de V:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

¿Puede un conjunto $\{A, B\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ generar V? Justifique.

2) (2.0 ptos) Para X, Y y Z dadas por

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

encuentre una base $\mathcal{B}$ de $W = \langle\{X, Y, Z\}\rangle$ incluída en $\{X, Y, Z\}$, y extiéndala a una base de V.

b) (2.0 ptos) Sea $\{u, v\}$ conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial. Pruebe que $\{2u+v, u+2v\}$ también es un conjunto linealmente independiente.

Solución:

a.1) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. Entonces $a+b+c+d = 0$ lo que permite escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[**0.4 ptos. por producir la escritura de A como combinación lineal de las matrices dadas**]. Con esto, el conjunto

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

es un generador de V [**0.4 ptos. por reconocer que la escritura muestra que S es generador**]. Además una combinación lineal de sus elementos es

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix}$$

que igualada a la matriz cero implica que $a = b = c = 0$ [**0.3 ptos. por proponer la combinación lineal, identificarla con una matriz e igualarla a la matriz nula**]. Esto muestra que el conjunto también es linealmente independiente, y por lo tanto base de V [**0.3 ptos. por concluir que S es linealmente independiente y 0.3 ptos. por concluir que S es base**].

Como el conjunto $\{A, B\}$ solo tiene dos elementos, no puede generar V, ya que de hacerlo implicaría que contiene una base que sería de tamaño menor a tres [**0.3 ptos. por invocar que las bases tienen el mismo cardinal (incluso si solo es implícitamente)**].

$a.2)$ **Primera forma:** La matriz Z es igual a $Y - X$, por lo que el conjunto $\{X, Y, Z\}$ no es linealmente independiente, y $\langle\{X, Y\}\rangle = W$, por resultado conocido [**0.5 ptos. por proponer un conjunto que genera W**].

También es claro que X no es combinación lineal de Y. Entonces $\{X, Y\}$ es linealmente independiente y genera W [**0.5 ptos. por justificar que el conjunto que genera también es linealmente independiente**].

Para extender $\{X, Y\}$ a una base de V, basta con agregarle un elemento de la base de la parte $a.1)$ que no está en W, pues la dimensión de V es tres [**0.5 ptos. por hacer uso de la dimensión de V**]. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[**0.5 ptos. por invocar, incluso si solo se hace de manera implícita, que al agregar a un conjunto linealmente independiente un elemento que no es combinación lineal de sus elementos, se obtiene otro conjunto linealmente independiente**].

Segunda forma: Expresamos X, Y, Z y la base encontrada en la parte $a.1)$ con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, agupamos las expresiones obtenidas como columnas de una matriz y escalonamos [**1.0 ptos. por identificar la matriz que hay que escalonar (la 1era a continuación)**]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[**0.4 ptos. por escalonar correctamente.**]

Se deduce que $\{X, Y\}$ es una base de W que puede ser completada a una base de V agregando la matriz [**0.6 ptos. por identificar un elemento de la completación de la base**]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$b)$ **Primera forma:** Una combinación lineal de los vectores dados es

$$a(2u + v) + b(u + 2v).$$

[**0.5 ptos. por proponer la combinación lineal**]. Al igualarla a cero se obtiene que

$$0 = a(2u + v) + b(u + 3v) = (2a + b)u + (a + 2b)v.$$

[**0.5 ptos. por hacer las manipulaciones que permiten expresarla como combinación lineal de u y v**]. Como $\{u, v\}$ es linealmente independiente, $2a + b = a + 2b = 0$ [**0.5 ptos. por invocar**

que el hecho que $\{u,v\}$ es linealmente independiente fuerza a que los coeficientes sean ceros]. La matriz asociada a este sistema es invertible por lo que la única solución es $a=b=0$. Así, el conjunto dado es linealmente independiente [**0.5 ptos. por obtener la conclusión**].

Segunda forma: Por resultado conocido, dos vectores son linealmente dependientes si y solo si uno es igual a un escalar multiplicado por el otro [**0.8 ptos. por invocar el resultado**]. Luego, si $\{2u+v, u+2v\}$ es linealmente dependiente, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $2u+v=\lambda(u+2v)$ o, equivalentemente,

$$(\lambda-2)u=(2\lambda-1)v. \qquad \text{([}\textbf{0.4 ptos. por llegar aquí}\text{])}$$

Si $\lambda=2$, entonces $v=0$, contradiciendo que $\{u,v\}$ es linealmente independiente. Si $\lambda\neq 2$, entonces $u=\frac{2\lambda-1}{\lambda-2}v$, por lo que u sería un escalar por v, luego $\{u,v\}$ serían linealmente dependientes, nuevamente contradiciendo la independencial lineal de $\{u,v\}$ [**0.8 ptos. por concluir correctamente**].

Indicaciones para la corrección:

- En la parte $a.2$), la segunda forma es equivalente a estudiar la independencia lineal de $\{X,Y,Z\}\cup S$. Al hacerlo, se llega a la misma matriz que se escalona en la segunda forma. Dar puntaje completo si alguien argumenta de esta forma.

P3. *a)* Sea $U=\{p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid \forall x\in\mathbb{R},\, p(x)=p(2x)\}$.

1) (1.5 ptos) Pruebe que U es un subespacio vectorial del espacio de los polinomios a coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado a lo más tres.
2) (2.0 ptos) Encuentre una base de U.

b) Sea S sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y sea $S^\perp$ su ortogonal dado por

$$S^\perp=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \forall s\in S, s^Tx=0\}.$$

1) (1.0 ptos) Pruebe que si $v\in S\cap S^\perp$, entonces $\|v\|=0$. Concluya que $S\cap S^\perp=\{0\}$.
2) (1.5 ptos) Sea T otro sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $(S+T)^\perp=S^\perp\cap T^\perp$.

Solución:

$a.1$) El conjunto U es no vacío, pues cualquier polinomio constante está en U [**0.5 ptos. por verificar que U es no vacío**]. Usamos propiedad que caracteriza los subespacios. Tomamos p y q en U y $\lambda\in\mathbb{R}$ y vemos que $\lambda p+q$ está en U. Para ello tenemos que verificar que, para cada $x\in\mathbb{R}$, $(\lambda p+q)(x)=(\lambda p+q)(2x)$ [**0.5 ptos. por indicar qué se debe probar**]. Usando las reglas de evaluación de funciones tenemos que

$$\begin{aligned}(\lambda p+q)(x) &= \lambda p(x)+q(x)\\ &= \lambda p(2x)+q(2x)\\ &= (\lambda p+q)(2x).\end{aligned}$$

[**0.5 ptos. por aplicar correctamente las reglas**]

$a.2$) Sea $p\in U$. Si $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces, como $p(x)=p(2x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (por definición de U), sigue que

$$a+bx+cx^2+dx^3=a+2bx+4cx^2+8dx^3.$$

[**0.5 ptos. por usar la definición de U para plantear la igualdad**]. Esto equivale a que $b=2b, c=4c$ y $d=8d$, por igualdad de polinomios, y entonces $b=c=d=0$ [**0.5 ptos. por reconocer que la igualdad de polinomios implica las igualdades mencionadas y 0.5 ptos. por concluir**]. Luego, U son los polinomios constantes que tienen como base a $\{1\}$ [**0.5 ptos. por indicar que $\{1\}$ es base de los polinomios constantes**].

$b.1)$ Si $v \in S \cap S^{\perp}$, se tiene que $v \in S$ y $v \in S^{\perp}$ (por definicion de intersección). Por definición de conjunto ortogonal, sigue que $\langle v, s\rangle = 0$ para todo $s \in S$, y en particular para $s = v$. Luego, $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = 0$ [**0.5 ptos por concluir que la norma de v es 0**]. Por propiedad vista acerca de $\|\cdot\|$, sigue que $v = 0$ y, por lo tanto, $S \cap S^{\perp} \subseteq \{0\}$ [**0.2 ptos. por concluir la inclusión**].

Por resultado visto, $S^{\perp}$ es s.e.v. Luego, como la intersección de s.e.v.'s es s.e.v., en particular $0 \in S^{\perp} \cap S$ [**0.3 ptos**].

En resumen $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

$b.2)$ En efecto, sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitario. Se tiene que:

$$\begin{aligned} x \in (S+T)^{\perp} &\iff \forall v \in S+T, \langle x, v\rangle = 0 && \text{(por definición de conjunto ortogonal)} \\ &\implies \forall s \in S, \langle x, s\rangle = 0 \ \wedge \forall t \in T, \langle x, t\rangle = 0 && \text{(porque } S, T \subseteq S+T\text{)} \\ &\iff x \in S^{\perp} \ \wedge \ x \in T^{\perp} && \text{(por definición de conjunto ortogonal)} \\ &\iff x \in S^{\perp} \cap T^{\perp}. && \text{(por definición de intersección)} \end{aligned}$$

[**0.5 ptos por la $\implies$ y 0.5 ptos por las otras tres $\iff$].**

El converso de la implicancia en la derivación anterior también se tiene, ya que por definición de suma de espacios vectoriales,

$$\begin{aligned} \forall s \in S, \langle x, s\rangle = 0 \wedge \forall t \in T, \langle x, t\rangle = 0 &\implies \forall s \in S, \forall t \in T, \langle x, s+t\rangle = 0 && \text{(por bilinealidad de } \langle\cdot,\cdot\rangle\text{)} \\ &\iff \forall v \in S+T, \langle x, v\rangle = 0. && \text{(por definición de suma de e.v.'s)} \end{aligned}$$

[**0.5 ptos por la $\implies$ y la $\iff$ que establecen el converso.**]

En resumen, $(S+T)^{\perp} = S^{\perp} \cap T^{\perp}$.

Indicaciones para la corrección:

- En la parte $a.1)$, también es válido tomar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y establecer que $\alpha p + \beta q \in U$.
- En las partes $b.1)$ y $b.2)$, también es válido, en lugar de usar las expresiones $\langle x, y\rangle$, que escriban directamente, $x^T y$.

Tiempo: 3.0 hrs.